дают возможность пользоваться при вычислении эфемериды формулами

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_x & n_x \\ m_y & n_y \\ m_z & n_z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1-\sigma^2 \\ \sigma \end{Vmatrix}. \tag{5.3}$$

Соотношения

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = q^2; \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 4q^2,$$
$$m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z = 0$$

могут служить для контроля величин (5.2).

§ 6. Метод Гаусса для нахождения параметра орбиты

В предыдущих параграфах было показано, что вычисление всех элементов орбиты по двум заданным гелиоцентрическим положениям светила выполняется очень просто, если параметр орбиты уже известен. Задача нахождения параметра, имеющая, таким образом, здесь основное значение, впервые полностью была решена Гауссом [1809]. Данный им метод и по настоящее время остается основным. Он применяется во всех случаях, когда различного рода приближенные методы становятся недостаточными.

Стоящая перед нами задача заключается в нахождении параметра p по двум положениям светила

$$\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\} \tag{6.1}$$

в моменты t_1 и t_2. Она приводится, как мы скоро увидим, к решению системы трансцендентных уравнений, что может быть выполнено лишь путем последовательных приближений. Чтобы сделать проведение этих последовательных приближений возможно более удобным, Гаусс выразил p через вспомогательную неизвестную η, равную отношению площади сектора орбиты, заключенного между векторами (6.1), к площади треугольника, образованного этими векторами и хордой. Таким образом,

$$\eta = \frac{k\sqrt{p}\,(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin 2f}, \tag{6.2}$$

где, как и раньше, через $2f = v_2 - v_1$ обозначен угол между векторами (6.1).

Эта формула показывает, что вычисление p приводится к вычислению η, и наоборот. Заметим, что введение η вместо p целесообразно еще и потому, что эта величина сама по себе используется при нахождении орбит из наблюдений, как это будет показано в гл. VIII.

Полагая для краткости

$$\tau = k(t_2 - t_1); \quad \varkappa = 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f,$$

выражение (6.2) можно представить так:

$$\eta = \frac{\tau\sqrt{p}}{\varkappa\sqrt{r_1 r_2}\sin f}. \tag{6.3}$$

Формулы (3.6) гл. I, будучи применены к двум рассматриваемым положениям светила, дают

$$\sqrt{r_1}\sin\frac{1}{2}v_1 = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{1}{2}E_1,$$

$$\sqrt{r_1}\cos\frac{1}{2}v_1 = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{1}{2}E_1,$$

$$\sqrt{r_2}\sin\frac{1}{2}v_2 = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{1}{2}E_2,$$

$$\sqrt{r_2}\cos\frac{1}{2}v_2 = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{1}{2}E_2.$$

Перемножая эти равенства попарно, а затем почленно складывая и вычитая результаты, получим

$$\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{1}{2}(v_2 - v_1) = a\sqrt{1-e^2}\sin\frac{1}{2}(E_2 - E_1),$$

$$\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{1}{2}(v_2 - v_1) = a\cos\frac{1}{2}(E_2 - E_1) - ae\cos\frac{1}{2}(E_2 + E_1).$$

Положим

$$E_2 - E_1 = 2g; \quad e\cos\frac{1}{2}(E_2 + E_1) = \cos h, \tag{6.4}$$

причем условимся, чтобы сделать определение угла h вполне однозначным, что

$$0^\circ < h < 180^\circ.$$

Только что полученные соотношения запишутся так:

$$\sqrt{r_1 r_2}\sin f = a\sqrt{1-e^2}\sin g, \tag{6.5}$$

$$\frac{1}{2}\varkappa = \sqrt{r_1 r_2}\cos f = a(\cos g - \cos h). \tag{6.6}$$

Поэтому вместо (6.3) имеем

$$\eta = \frac{\tau\sqrt{p}}{\varkappa a\sqrt{1-e^2}\sin g}$$

или, поскольку $p = a(1 - e^2)$,

$$\eta = \frac{\tau}{\varkappa\sqrt{a}\sin g}. \tag{6.7}$$

Покажем теперь, что легко получить два уравнения, не содержащие других неизвестных, кроме a и g.

В самом деле, соотношения

$$r_1 = a(1 - e\cos E_1); \quad r_2 = a(1 - e\cos E_2)$$

дают, с учетом (6.4),

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos g \cos h).$$

Так как на основании (6.6)

$$\cos h = \cos g - \frac{\varkappa}{2a}, \tag{6.8}$$

то это равенство принимает вид

$$r_1 + r_2 = 2a\sin^2 g + \varkappa \cos g. \tag{6.9}$$

С другой стороны, уравнение Кеплера дает

$$E_1 - e\sin E_1 = ka^{-3/2}(t_1 - T); \quad E_2 - e\sin E_2 = ka^{-3/2}(t_2 - T),$$

откуда

$$E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1) = ka^{-3/2}(t_2 - t_1),$$

или

$$\tau a^{-3/2} = 2g - 2\sin g \cos h.$$

Воспользовавшись опять равенством (6.8), получим

$$\tau a^{-3/2} = 2g - \sin 2g + \varkappa a^{-1}\sin g. \tag{6.10}$$

Мы получили, таким образом, два уравнения (6.9), (6.10), не заключающие других неизвестных помимо a и g.

Рассмотрение соотношений (6.7), (6.9) и (6.10) показывает, что из трех неизвестных, входящих в них, легче всего исключить a. Равенство (6.7) дает

$$a^{-1} = \tau^{-2}\varkappa^2\eta^2\sin^2 g.$$

Подставив это выражение в равенства (6.9) и (6.10), получим

$$r_1 + r_2 = 2\tau^2\varkappa^{-2}\eta^{-2} + \varkappa\cos g,$$

$$\tau^{-2}\varkappa^3\eta^3\sin^3 g = 2g - \sin 2g + \tau^{-2}\varkappa^3\eta^2\sin^3 g,$$

или

$$\frac{r_1 + r_2}{2\varkappa} = \tau^2\varkappa^{-3}\eta^{-2} + \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2\frac{g}{2}\right),$$

$$\tau^{-2}\varkappa^3(\eta^3 - \eta^2) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}.$$

Полагая

$$n = \tau^2\varkappa^{-3}; \quad l = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1 + r_2}{\varkappa} - 1\right), \tag{6.11}$$

и вводя функцию $X(x)$, определяемую равенствами

$$X(x) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}; \qquad x = \sin^2 \frac{g}{2}, \tag{6.12}$$

окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} \eta^3 - \eta^2 &= mX(x), \\ x &= m\eta^{-2} - l. \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Таковы уравнения, полученные Гауссом для нахождения отношения η. Решив эти уравнения, легко вычислить, пользуясь формулой (6.3), параметр орбиты.

В заключение отметим, что вывод уравнений (6.13) остается в силе и для случая гиперболического движения, так как все формулы, которыми мы пользовались, имеют место и в этом случае; разница заключается только в том, что для гиперболического движения в них $a<0$, $e>1$, а эксцентрические аномалии имеют чисто мнимые значения (§ 6, гл. III). Сообразно с этим для гиперболических орбит величина

$$x = \sin^2 \frac{g}{2} = \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{4}$$

будет отрицательной.

Формулы для параболических орбит можно получить путем предельного перехода, делая $a \to \infty$. Так как все эксцентрические аномалии будут при этом стремиться к нулю, то в пределе получим $x=0$.

Итак, если при решении уравнений (6.13) получится

$x>0$, то орбита эллиптическая.

$x=0$, то орбита параболическая,

$x<0$, то орбита гиперболическая.

§ 7. Решение уравнений Гаусса, определяющих отношение площадей сектора и треугольника

Переходя к решению уравнений (6.13), дающих отношение η, мы должны прежде всего познакомиться с некоторыми свойствами функции $X(x)$, определяемой равенствами (6.12). Эти равенства дают

$$g = 2 \arcsin \sqrt{x},$$

откуда

$$2g - \sin 2g = 2g - 4 \sin \frac{1}{2} g \cos \frac{1}{2} g \left(1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} g\right) =$$
$$= 4 \arcsin \sqrt{x} - 4 \sqrt{x} \sqrt{1 - x}\,(1 - 2x).$$