и вводя функцию $X(x)$, определяемую равенствами

$$X(x)=\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}; \qquad x=\sin^2\frac{g}{2}, \tag{6.12}$$

окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} \eta^3-\eta^2&=mX(x),\\ x&=m\eta^{-2}-l. \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Таковы уравнения, полученные Гауссом для нахождения отношения η. Решив эти уравнения, легко вычислить, пользуясь формулой (6.3), параметр орбиты.

В заключение отметим, что вывод уравнений (6.13) остается в силе и для случая гиперболического движения, так как все формулы, которыми мы пользовались, имеют место и в этом случае; разница заключается только в том, что для гиперболического движения в них $a<0$, $e>1$, а эксцентрические аномалии имеют чисто мнимые значения (§ 6, гл. III). Сообразно с этим для гиперболических орбит величина

$$x=\sin^2\frac{g}{2}=\sin^2\frac{E_2-E_1}{4}$$

будет отрицательной.

Формулы для параболических орбит можно получить путем предельного перехода, делая $a\to\infty$. Так как все эксцентрические аномалии будут при этом стремиться к нулю, то в пределе получим $x=0$.

Итак, если при решении уравнений (6.13) получится

$x>0$, то орбита эллиптическая.

$x=0$, то орбита параболическая,

$x<0$, то орбита гиперболическая.

§ 7. Решение уравнений Гаусса, определяющих отношение площадей сектора и треугольника

Переходя к решению уравнений (6.13), дающих отношение η, мы должны прежде всего познакомиться с некоторыми свойствами функции $X(x)$, определяемой равенствами (6.12). Эти равенства дают

$$g=2\arcsin\sqrt{x},$$

откуда

$$2g-\sin 2g=2g-4\sin\frac{1}{2}g\cos\frac{1}{2}g\left(1-2\sin^2\frac{1}{2}g\right)=$$
$$=4\arcsin\sqrt{x}-4\sqrt{x}\sqrt{1-x}\,(1-2x).$$

Следовательно,

$$2g - \sin 2g = (\sqrt{x})^3 \left(\frac{32}{3} - \frac{16}{5} x - \frac{4}{7} x^2 - \ldots\right).$$

С другой стороны,

$$\sin^3 g = (2\sqrt{x}\sqrt{1-x})^3 = (\sqrt{x})^3 (8 - 12x + 3x^2 + \ldots),$$

поэтому

$$X(x) = \frac{4}{3} + \frac{8}{5} x + \frac{64}{35} x^2 + \ldots$$

Таким образом, найдены первые члены разложения рассматриваемой функции и доказана ее голоморфность в круге $|x| < 1$. Чтобы вычислить больше членов этого разложения, надо воспользоваться дифференциальным уравнением

$$2(x - x^2)\frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x) X,$$

которому, как легко убедиться, удовлетворяет функция $X(x)$.

Подставив в это уравнение ряд

$$X(x) = \frac{4}{3} + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\alpha_n = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+4)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+3)}.$$

Таким образом,

$$X(x) = \sum_0^\infty \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+4)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+3)} x^n. \qquad (7.1)$$

Положим

$$X(x) = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)}. \qquad (7.2)$$

Это равенство дает

$$1 - \frac{6}{5} x + \frac{6}{5} \xi = \left(1 + \frac{6}{5} x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7} x^2 + \ldots\right)^{-1} =$$

$$= 1 - \frac{6}{5} x + \frac{12}{175} x^2 + \frac{312}{7875} x^3 + \ldots$$

Следовательно,

$$\xi = \frac{2}{35} x^2 + \frac{52}{1575} x^3 + \ldots \qquad (7.3)$$

Введение функции $\xi(x)$ выгодно в том отношении, что, как показывает сравнение (7.1) и (7.3), табулирование этой функции намного удобнее табулирования функции $X(x)$.

Подстановка (7.2) в уравнения (6.13) дает

$$\eta^3-\eta^2=\frac{\frac{4}{3}m}{1-\frac{6}{5}(x-\xi)}=\frac{\frac{10}{9}m}{\frac{5}{6}-x+\xi}=\frac{\frac{10}{9}m}{\frac{5}{6}+l+\xi-m\eta^{-2}}.$$

Разделим числитель и знаменатель последней дроби на $\frac{5}{6}+l+\xi$ и положим

$$h=\frac{m}{\frac{5}{6}+l+\xi}.$$

Это даст

$$\eta^3-\eta^2=\frac{\frac{10}{9}h}{1-h\eta^{-2}},$$

или

$$\eta^3-\eta^2-h\eta-\frac{1}{9}h=0. \tag{7.4}$$

Таким образом, для нахождения η мы теперь имеем вместо (6.13) такие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &h=\frac{m}{\frac{5}{6}+l+\xi}; \qquad \eta^3-\eta^2-h\eta-\frac{1}{9}h=0,\\ &x=m\eta^{-2}-l. \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Решение этих уравнений очень легко выполняется методом итерации. Для начала можно положить $x=0$, $\xi=0$ и, следовательно,

$$h=\frac{m}{\frac{5}{6}+l}; \qquad \frac{5}{6}=0{,}833\,3333\ldots$$

Найдя из кубического уравнения соответствующее значение η, вычисляем x. Это дает возможность найти $\xi(x)$, а следовательно, и более точное значение h, с которым повторяется нахождение η и т. д. Во всех встречающихся на практике случаях этот процесс быстро сходится. Функция $\xi(x)$ берется из таблицы VIII.

Заметим, что для первого приближения вместо $x=0$ выгоднее взять $x=m-l$.

Решение кубического уравнения (7.4) можно заменить нахождением η по аргументу h из особой таблицы. Однако необходимости в такой таблице нет, поскольку существуют весьма удобные способы для непосредственного решения этого уравнения. Один из таких способов, предложенный Ганзеном [1863], заключается в следующем.

Положим

$$\eta=1+s.$$

Тогда уравнение (7.4) заменится таким:

$$s(1+s)^2-\frac{10}{9}h\left(1+\frac{9}{10}s\right)=0.$$

Пользуясь тождеством

$$(1+s)^2=\left(1+\frac{9}{10}s\right)\left(1+\frac{11}{10}s\right)+\frac{1}{100}s^2,$$

его можно написать в следующем виде:

$$\frac{10}{9}h=s\left(1+\frac{11}{10}s\right)+\frac{1}{100}\frac{s^3}{1+\frac{9}{10}s},$$

или

$$\frac{11}{9}h=\frac{11}{10}s\left(1+\frac{11}{10}s\right)+\frac{11}{1000}\frac{s^3}{1+\frac{9}{10}s}.$$

В обычных условиях вычисления предварительной орбиты второй член с правой стороны может быть отброшен без всякого ущерба для точности. Поэтому, полагая для сокращения письма

$$d=\frac{11}{9}h;\quad s_1=\frac{11}{10}s,$$

получим квадратное уравнение

$$s_1(1+s_1)=d,$$

очень удобно решаемое способом итерации. В самом деле, его можно представить так:

$$s_1=d/(1+s_1),$$

где величина $s_1=\frac{11}{10}s$ очень мала.

Применение итеративного процесса в данном случае эквивалентно вычислению цепной дроби. Поэтому

$$\eta=1+\frac{10}{11}\cfrac{d}{1+\cfrac{d}{1+\cfrac{d}{1+\dots}}}\tag{7.6}$$

Если угол $2f$ в рассматриваемом случае велик (больше 18° при семизначном вычислении, или больше 27° при шестизначном — для орбит с не очень большими эксцентриситетами), надо повторить вычисление по формуле (7.6), взяв вместо d величину

$$d'=d-\frac{11}{1000}\frac{s^3}{1+\frac{9}{10}s}.$$

Таким повторением будет получено совершенно точное решение уравнения (7.4). Конечно, при вычислении нового значения d должно быть взято значение h, определяемое соотношениями (7.5).

Однако для огромного большинства встречающихся в практике вычисления орбит случаев можно ограничиться однократным применением формулы (7.6), взяв в ней

$$d=\frac{11}{9}\frac{m}{\frac{5}{6}+l}=\frac{22m}{15+18l}.$$

Если сюда подставить выражения (6.11), получим

$$d=\frac{\frac{11}{9}k^2(t_2-t_1)^2}{\varkappa^2\left[\frac{1}{3}\varkappa+\frac{1}{2}(r_1+r_2)\right]};\qquad \frac{11}{9}k^2=0{,}000\,361\,6705, \tag{7.7}$$

причем для вычисления $\varkappa$ удобно пользоваться следующей легко выводимой формулой:

$$\varkappa^2=2(r_1r_2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2). \tag{7.8}$$

Формулы (7.6) и (7.7) дают искомое отношение η с ошибкой шестого порядка малости, если τ принимать, как это всегда делается, за величину первого порядка.

Примечание 1. Изложенный метод решения уравнений (6.13) является наиболее употребительным.

Если значение $|x|$ велико и выходит за границы таблицы VIII, то систему (6.13) следует заменить уравнением

$$(x+l)[1+(x+l)X(x)]^2=m,$$

получающимся после исключения η. Это уравнение легко решить методом интерполирования, так как в рассматриваемом случае, когда промежуток времени τ весьма велик, приближенное значение разности эксцентрических аномалий, а следовательно, и x, бывает обычно известно. Функцию $X(x)$ здесь можно вычислять непосредственно по формулам (6.12) без заметной потери точности. Когда x найдено, формула

$$\eta^2=\frac{m}{x+l}$$

даст η.

С другой стороны, когда промежуток времени τ, а следовательно, и величины m и l достаточно малы, можно воспользоваться немногими первыми членами разложения:

$$\begin{aligned}\eta=1&+m\left(\frac{4}{3}-\frac{8}{5}l+1{,}8286l^2-2{,}03l^3+2{,}2l^4-2l^5+\ldots\right)-\\&-m^2\left(\frac{88}{45}-4{,}876l+8{,}777l^2-13{,}7l^3+20l^4-30l^5+\ldots\right)+\\&+m^3(5{,}6212-21{,}21l+51{,}8l^2-100l^3+200l^4-\ldots)-\\&-m^4(20{,}13-102l+300l^2-700l^3+\ldots)+\\&+m^5(80{,}6-510l+1700l^2-\ldots).\quad -m^6(300-\ldots)+\ldots,\end{aligned}$$

которое получается, если из уравнений (6.13) исключить x.

А. В. Пурцхванидзе [1952] показал, что ошибка приближенной формулы

$$\eta = 1 + \frac{4}{3} m \left[1 - 1{,}1\left(\frac{4}{3} m\right) - 1{,}2 l\right]$$

не превосходит единицы шестого знака при $2g < 8°$ и единицы седьмого знака при $2g < 5°$.

Примечание II. Ряд (7.1) сходится достаточно быстро только при очень малых значениях $|x|$. В. И. Фабрициус показал [1892], что функцию $X(x)$ можно представить в другом, гораздо более удобном для вычислений виде, а именно:

$$X(x) = 4(1+\zeta)\left(\frac{1}{1\cdot 1\cdot 3} + \frac{\zeta}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\zeta^2}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{\zeta^3}{5\cdot 7\cdot 9} - \ldots\right),$$

где

$$\zeta = \frac{x}{1-x} = \operatorname{tg}^2 \frac{g}{2}.$$

Чтобы получить это выражение, заметим, что

$$X(x) = \frac{4}{3} F\left(1, 3, \frac{5}{2};\ x\right),$$

как это видно из равенства (7.1).

Применение известной формулы для преобразования гипергеометрических функций

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma; \frac{-x}{1-x}\right)$$

дает указанное выражение.

§ 8. Отношение площадей сектора и треугольника для параболической орбиты. Теорема Эйлера

Чтобы получить отношение η для параболической орбиты, предположим, что в соотношениях (6.13) большая полуось a стремится к бесконечности. В этом случае, как уже было отмечено, $x \to 0$, а так как $X(0) = \frac{4}{3}$, то рассматриваемые соотношения принимают вид

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{4}{3} m; \qquad m\eta^{-2} - l = 0, \tag{8.1}$$

где

$$m = \tau^2 \left(2\sqrt{r_1 r_2}\cos f\right)^{-3}; \qquad l = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}\cos f} - 1\right). \tag{8.2}$$

Исключение величины m (содержащей время) дает следующее, чисто геометрическое соотношение:

$$\eta = 1 + \frac{4}{3} l = \frac{1}{3} + \frac{r_1 + r_2}{3\sqrt{r_1 r_2}\cos f}. \tag{8.3}$$

Обозначим через s хорду, соединяющую концы рассматриваемых радиусов-векторов. Тогда

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos 2f,$$