А. В. Пурцхванидзе [1952] показал, что ошибка приближенной формулы

$$\eta = 1 + \frac{4}{3}\, m \left[1 - 1{,}1\left(\frac{4}{3}\, m\right) - 1{,}2 l\right]$$

не превосходит единицы шестого знака при $2g < 8^\circ$ и единицы седьмого знака при $2g < 5^\circ$.

Примечание II. Ряд (7.1) сходится достаточно быстро только при очень малых значениях $|x|$. В. И. Фабрициус показал [1892], что функцию $X(x)$ можно представить в другом, гораздо более удобном для вычислений виде, а именно:

$$X(x) = 4\,(1+\zeta)\left(\frac{1}{1\cdot 1\cdot 3} + \frac{\zeta}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\zeta^2}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{\zeta^3}{5\cdot 7\cdot 9} - \ldots\right),$$

где

$$\zeta = \frac{x}{1-x} = \operatorname{tg}^2\frac{g}{2}.$$

Чтобы получить это выражение, заметим, что

$$X(x) = \frac{4}{3} F\left(1,\ 3,\ \frac{5}{2};\ x\right),$$

как это видно из равенства (7.1).

Применение известной формулы для преобразования гипергеометрических функций

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma;\ \frac{-x}{1-x}\right)$$

дает указанное выражение.

§ 8. Отношение площадей сектора и треугольника для параболической орбиты. Теорема Эйлера

Чтобы получить отношение η для параболической орбиты, предположим, что в соотношениях (6.13) большая полуось a стремится к бесконечности. В этом случае, как уже было отмечено, $x \to 0$, а так как $X(0) = \frac{4}{3}$, то рассматриваемые соотношения принимают вид

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{4}{3} m; \qquad m\eta^{-2} - l = 0, \tag{8.1}$$

где

$$m = \tau^2 \left(2\sqrt{r_1 r_2}\cos f\right)^{-3}; \qquad l = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}\cos f} - 1\right). \tag{8.2}$$

Исключение величины m (содержащей время) дает следующее, чисто геометрическое соотношение:

$$\eta = 1 + \frac{4}{3}\, l = \frac{1}{3} + \frac{r_1 + r_2}{3\sqrt{r_1 r_2}\cos f}. \tag{8.3}$$

Обозначим через s хорду, соединяющую концы рассматриваемых радиусов-векторов. Тогда

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos 2f,$$

или

$$s^2=(r_1+r_2)^2-4r_1r_2\cos^2 f,$$

или

$$\left(\frac{s}{r_1+r_2}\right)^2=1-\left(\frac{2\sqrt{r_1r_2}\cos f}{r_1+r_2}\right)^2. \tag{8.4}$$

Таким образом, положив

$$\sin\gamma=\frac{s}{r_1+r_2}; \qquad 0°<\gamma<90°, \tag{8.5}$$

окончательно получим

$$\eta=\frac{1}{3}(1+2\sec\gamma). \tag{8.6}$$

При вычислении параболической орбиты хорда s обычно известна, поэтому применение формул (8.5) и (8.6) может оказаться несколько более удобным, нежели (8.3).

Весьма важное свойство параболического движения получается, если из соотношений (8.1) исключить величину η. Это дает

$$m=l\left(1+\frac{4}{3}l\right)^2, \tag{8.7}$$

или

$$18m=(\sec\gamma-1)(2\sec\gamma+1)^2,$$

поскольку

$$l=\frac{1}{2}(\sec\gamma-1).$$

А так как на основании (8.2), (8.4) и (8.5)

$$m=\tau^2\left[(r_1+r_2)\cos\gamma\right]^{-3},$$

то после несложных преобразований получим

$$6\tau(r_1+r_2)^{-3/2}=(1+\sin\gamma)^{3/2}-(1-\sin\gamma)^{3/2},$$

или, учитывая (8.5),

$$6\tau=(r_1+r_2+s)^{3/2}-(r_1+r_2-s)^{3/2}. \tag{8.8}$$

При выводе этого соотношения мы предполагали, что $2f<180°$, и потому $\cos f>0$. Легко видеть, что в случае, когда разность истинных аномалий $v_2-v_1=2f$ больше 180°, соотношение (8.8) принимает вид

$$6\tau=(r_1+r_2+s)^{3/2}+(r_1+r_2-s)^{3/2}. \tag{8.9}$$

Соотношения (8.8) и (8.9) представляют знаменитую **теорему Эйлера**, открытую им в 1743 г.

Поскольку угол γ вполне определяется (в случае $2f < 180°$) величиной

$$\mu = \frac{(2\tau)^2}{(r_1 + r_2)^3},$$

то, как легко найти,

$$1/\eta = 1 - \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{6}\mu^2 - \frac{1}{9}\mu^3 - \frac{55}{648}\mu^4 - \ldots$$

Существуют таблицы, дающие η (или $\lg\eta$) по аргументу μ [М. Ф. Субботин, 1929 и 1941] или по аргументу $\sqrt{\mu}$ [Баушингер и Штракке, 1934].

Подстановка выражений (8.2) в соотношение (8.7) дает следующую интересную формулу,

$$9\tau^2 = 2\left(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f\right)\left(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2}\cos f\right)^2, \qquad (8.10)$$

эквивалентную теореме Эйлера.

Конечно, соотношения (8.6), (8.9) и (8.10), полученные нами путем предельного перехода, могут быть легко выведены непосредственно из формул параболического движения.

§ 9. Вычисление элементов орбиты малой планеты по двум гелиоцентрическим положениям. Пример

Дадим сводку наиболее употребительных формул, причем в основу положим методы, изложенные в §§ 3 и 7.

Пусть имеем гелиоцентрические экваториальные координаты планеты

$$(x_1, y_1, z_1), \qquad (x_2, y_2, z_2),$$

соответствующие моментам t_1 и t_2.

Прежде всего вычисляем радиусы-векторы r_1, r_2 и вспомогательные величины:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$
$$\sigma = \left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\right) r_1^{-2};$$
$$x_0 = x_2 - \sigma x_1; \quad y_0 = y_2 - \sigma y_1; \quad z_0 = z_2 - \sigma z_1; \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

После этого находим разность истинных аномалий $2f = v_2 - v_1$ по формулам

$$\sin 2f = r_0/r_2; \quad \cos 2f = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)/r_1 r_2.$$

Согласие этих величин является контролем только что выполненных вычислений. При малых значениях $2f$ этот контроль мало чувствителен и его можно заменить таким:

$$(r_1 r_0)^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$