Поскольку угол γ вполне определяется (в случае $2f < 180°$) величиной

$$\mu = \frac{(2\tau)^2}{(r_1 + r_2)^3},$$

то, как легко найти,

$$1/\eta = 1 - \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{6}\mu^2 - \frac{1}{9}\mu^3 - \frac{55}{648}\mu^4 - \ldots$$

Существуют таблицы, дающие η (или $\lg\eta$) по аргументу μ [М. Ф. Субботин, 1929 и 1941] или по аргументу $\sqrt{\mu}$ [Баушингер и Штракке, 1934].

Подстановка выражений (8.2) в соотношение (8.7) дает следующую интересную формулу,

$$9\tau^2 = 2\left(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f\right)\left(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2}\cos f\right)^2, \quad (8.10)$$

эквивалентную теореме Эйлера.

Конечно, соотношения (8.6), (8.9) и (8.10), полученные нами путем предельного перехода, могут быть легко выведены непосредственно из формул параболического движения.

§ 9. Вычисление элементов орбиты малой планеты по двум гелиоцентрическим положениям. Пример

Дадим сводку наиболее употребительных формул, причем в основу положим методы, изложенные в §§ 3 и 7.

Пусть имеем гелиоцентрические экваториальные координаты планеты

$$(x_1, y_1, z_1), \qquad (x_2, y_2, z_2),$$

соответствующие моментам t_1 и t_2.

Прежде всего вычисляем радиусы-векторы r_1, r_2 и вспомогательные величины:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$
$$\sigma = \left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\right) r_1^{-2};$$
$$x_0 = x_2 - \sigma x_1; \quad y_0 = y_2 - \sigma y_1; \quad z_0 = z_2 - \sigma z_1; \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

После этого находим разность истинных аномалий $2f = v_2 - v_1$ по формулам

$$\sin 2f = r_0/r_2; \quad \cos 2f = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)/r_1 r_2.$$

Согласие этих величин является контролем только что выполненных вычислений. При малых значениях $2f$ этот контроль мало чувствителен и его можно заменить таким:

$$(r_1 r_0)^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Затем вычисляется отношение η и параметр орбиты p. Для этого служат формулы:

$$\varkappa^2 = 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2),$$

$$\tau = k(t_2 - t_1); \quad k = 0{,}017\,202\,098\,95,$$

$$d = \frac{\frac{11}{9}\tau^2}{\varkappa^2\left[\frac{1}{3}\varkappa + \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\right]} = \frac{22\tau^2}{\varkappa^2[6\varkappa + 9(r_1 + r_2)]},$$

$$\eta = 1 + \frac{10}{11}\cfrac{d}{1 + \cfrac{d}{1 + \ldots}}, \qquad \sqrt{p} = \eta r_1 r_0/\tau.$$

Если в пределах принятой точности нельзя пренебречь $d^3/20$, то полученное значение η следует уточнить при помощи способа, указанного в § 7.

Формулы

$$q_1 = p/r_1 - 1; \quad q_2 = p/r_2 - 1;$$

$$\begin{cases} e \sin v_1 = (q_1 \cos 2f - q_2)/\sin 2f, \\ e \cos v_1 = q_1, \end{cases}$$

$$v_2 = v_1 + 2f$$

дают истинные аномалии и эксцентриситет.

Контроль:

$$p = r_2(1 + e\cos v_2).$$

Для вычисления большой полуоси орбиты и эксцентрических аномалий служат соотношения:

$$e = \sin\varphi; \qquad a = \frac{p}{(1-e)(1+e)} = \frac{p}{\cos^2\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1 = \operatorname{ctg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1$$

и аналогично для E_2.

Контроль:

$$b = a\cos\varphi; \quad b\sin\frac{1}{2}(E_2 - E_1) = \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{1}{2}(v_2 - v_1).$$

Затем идет вычисление средних аномалий:

$$e^\circ = 57^\circ{,}295\,7795e = [1{,}758\,12263]\,e,$$

$$M_1 = E_1 - e^\circ \sin E_1; \qquad M_2 = E_2 - e^\circ \sin E_2.$$

Если употребляются таблицы со старинным подразделением градуса, то эксцентриситет выражают в секундах дуги:

$$e'' = 206\,264'', \qquad 81e = [5{,}314\,42513]e.$$

Среднее суточное движение и средняя аномалия M_0 избранной эпохи t_0 вычисляются по формулам

$$n = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}; \quad M_0 = M_1 + n(t_0 - t_1).$$

Контроль: при помощи таблицы III находим n'' и $n^\circ = n''/3600''$. Если вычисления ведутся более чем с шестью знаками, то

$$n^\circ = 0^\circ{,}985\,60767/a\sqrt{a} = [9{,}99370407]/a\sqrt{a}.$$

Векторные элементы вычисляются по формулам (3.8), которые удобно представить в таком виде:

$$\begin{Vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_0 \\ y_1 & y_0 \\ z_1 & z_0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} +r_1^{-1}\cos v_1 & +r_1^{-1}\sin v_1 \\ -r_0^{-1}\sin v_1 & +r_0^{-1}\cos v_1 \end{Vmatrix}.$$

Полезно тут же вычислить и величины

$$A_x = aP_x; \quad A_y = aP_y; \quad A_z = aP_z,$$
$$B_x = bQ_x; \quad B_y = bQ_y; \quad B_z = bQ_z,$$

и сразу проконтролировать этот раздел при помощи соотношений

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = a^2; \quad B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = b^2;$$
$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0.$$

Вычисление i, Ω и ω производится по формулам (§ 1):

$$\sin i \sin\omega = P_z\cos\varepsilon - P_y\sin\varepsilon; \qquad \sin\Omega = (P_y\cos\omega - Q_y\sin\omega)\sec\varepsilon,$$
$$\sin i\cos\omega = Q_z\cos\varepsilon - Q_y\sin\varepsilon; \quad \cos\Omega = P_x\cos\omega - Q_x\sin\omega,$$

причем наклон эклиптики к экватору ε берется для эпохи употребляемой координатной системы.

Контроль: $\sin\Omega$ и $\cos\Omega$ должны соответствовать одному и тому же углу; кроме того, должно быть

$$P_x\sin\omega + Q_x\cos\omega = -\cos i\sin\Omega.$$

Пример. Для малой планеты 1931 LB были получены два следующие гелиоцентрические положения (экваториальная система координат эпохи 1931,0):

t_1	1931 июнь 6,873 91	t_2	1931 июнь 37,845 74
x_1	−0,681 413	x_2	−0,366 131
y_1	−2,623 534	y_2	−2,656 641
z_1	−0,821 382	z_2	−0,897 057

Для 1931,0 астрономические ежегодники дают:

$$\sin\varepsilon = 0{,}397\,9207, \qquad \cos\varepsilon = 0{,}917\,4198.$$

Вычисление элементов можно расположить следующим образом;

r_1^2	8,021 923
r_1	2,832 300
σ	+0,991 795
r_0^2	0,105 6853
r_0	0,325 093
$r_1 r_0$	0,920 761
τ	0,532 7805
$r_1 r_0/\tau$	1,728 219
η	1,002 0907
$\sqrt{p}$	1,731 832
p	2,999 242
e	0,061 639
φ	3°,533 90
$\cos\varphi$	0,998 098
e°	3°,531 655
$45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$	46,766 95
$1 - e^2$	0,996 201
a	3,010 680
b	3,004 954
n''	679'',220
n°	0°,188 672
t_0	37^d,000 00
$t_1 - t_0$	—30,126 09
$n^\circ (t_1 - t_0)$	—5°,684 04
M_0	350°,651 87

r_2^2	7,996 505
r_2	2,827 809
x_0	+0,309 691
y_0	—0,054 633
z_0	—0,082 414
$\sin 2f$	+0,114 9629
$\cos 2f$	+0,993 370
q_2	+0,060 624
q_1	+0,058 942
$e \sin v_1$	—0,018 032
$\operatorname{tg} v_1$	—0,305 928
$\cos v_1$	+0,956 252
$\sin v_1$	—0,292 544
v_2	349°,591 15
v_1	342°,989 66
E_2	350°,211 00
E_1	343,994 02
$\sin E_2$	—0,170 020
$\sin E_1$	—0,275 738
M_2	350°,811 45
M_1	344,967 83
$M_2 - M_1$	5,843 62
n°	0,188 675
a^2	9,064 194
b^2	9,029 749

$x_1 x_2 + \ldots$	+7,956 101
$r_1 r_2$	8,009 203
$\varkappa^2$	31,930 608
$\varkappa$	5,650 717
$r_1 + r_2$	5,660 109
$\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$	2,830 055
$\frac{1}{3}\varkappa$	1,883 572
$[\ldots]$	4,713 627
$\varkappa^2 [\ldots]$	150,509
$\frac{11}{9}\tau^2$	0,346 934
d	0,002 3050
$d(1 + \ldots)$	0,002 2998
$2f$	6°,601 49
f	3°,300 75
$\frac{1}{2} v_1$	171°,494 83
$\frac{1}{2} v_2$	174,795 58
$\operatorname{tg}\frac{1}{2} v_1$	—0,149 544
$\operatorname{tg}\frac{1}{2} v_2$	—0,091 085
$\operatorname{ctg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$	0,940 149
$\operatorname{tg}\frac{1}{2} E_1$	—0,140 594
$\operatorname{tg}\frac{1}{2} E_2$	—0,085 634
$\frac{1}{2} E_2$	175°,105 50
$\frac{1}{2} E_1$	171°,997 01
$\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$	3°,108 49
$\sin\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$	0,054 227
$\sin f$	0,057 577
$b \sin\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$	0,162 950
$\sqrt{r_1 r_2}\sin f$	0,162 946

Далее находим векторные элементы:

$$\begin{Vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0{,}681\,413 & +0{,}309\,691 \\ -2{,}623\,534 & -0{,}054\,633 \\ -0{,}821\,382 & -0{,}082\,414 \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} +0{,}337\,624 & -0{,}103\,289 \\ +0{,}899\,878 & +2{,}941\,472 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +0{,}048\,623 & +0{,}981\,330 \\ -0{,}934\,931 & +0{,}110\,279 \\ -0{,}351\,481 & -0{,}157\,579 \end{Vmatrix}.$$

Остается вычислить коэффициенты A и B, а также угловые эклиптические элементы ω, i, Ω:

A_x	+0,146 388	B_x	+2,948 851	A^2	9,064 186
A_y	−2,814 778	B_y	+0,331 383	B^2	9,029 756
A_z	−1,058 197	B_z	−0,473 518	AB	−0,000 018
$P_z \cos\varepsilon$	−0,322 4556	$P_y \cos\omega$	+0,904 1699	$P_x \cos\omega$	−0,047 0232
$-P_y \sin\varepsilon$	+0,372 0285	$-Q_y \sin\omega$	−0,028 0553	$-Q_x \sin\omega$	−0,249 6533
$Q_z \cos\varepsilon$	−0,144 5661	$\sin\Omega$	+0,954 977	$-P_x \sin\omega$	−0,012 3698
$-Q_y \sin\varepsilon$	−0,043 8823	$\cos\Omega$	−0,296 676	$-Q_x \cos\omega$	+0,949 0423
$\sin i \sin\omega$	+0,049 5729			Сумма	+0,936 672
$\sin i \cos\omega$	−0,188 4484			$\cos i \sin\Omega$	+0,936 671
$\mathrm{tg}\,\omega$	−0,263 058			1931,0 ω	165°,261 79
$\sin\omega$	+0,254 403			i	11,236 54
$\cos\omega$	−0,967 098			Ω	107,258 10
$\sin i$	+0,194 860				
$\cos i$	+0,980 831				

§ 10. Площадь фокального сектора конического сечения

В предыдущих параграфах было показано, что при нахождении орбиты по граничным условиям весьма большое значение имеет отношение площади фокального сектора конического сечения к площади треугольника, образованного радиусами-векторами, ограничивающими этот сектор. При вычислении этого отношения — величины, по существу, чисто геометрической, мы брали для площади фокального сектора значение динамическое, вытекающее из закона площадей. Таким образом, мы избежали выражения площади этого сектора через геометрические условия задачи. Но получение такого геометрического выражения для площади сектора представляет, тем не менее, большой интерес, так как открывает другой путь для нахождения элементов.

Обозначим через r_1 и r_2 радиусы-векторы, ограничивающие сектор, через v_1 и v_2 — соответствующие им истинные аномалии. Удвоенная площадь сектора дается, как известно, формулой

$$(r_1 r_2) = \int_{v_1}^{v_2} r^2\, dv.$$