Далее находим векторные элементы:

$$\begin{Vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0{,}681\,413 & +0{,}309\,691 \\ -2{,}623\,534 & -0{,}054\,633 \\ -0{,}821\,382 & -0{,}082\,414 \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} +0{,}337\,624 & -0{,}103\,289 \\ +0{,}899\,878 & +2{,}941\,472 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +0{,}048\,623 & +0{,}981\,330 \\ -0{,}934\,931 & +0{,}110\,279 \\ -0{,}351\,481 & -0{,}157\,579 \end{Vmatrix}.$$

Остается вычислить коэффициенты A и B, а также угловые эклиптические элементы ω, i, Ω:

A_x	$+0{,}146\,388$	B_x	$+2{,}948\,851$	A^2	$9{,}064\,186$
A_y	$-2{,}814\,778$	B_y	$+0{,}331\,383$	B^2	$9{,}029\,756$
A_z	$-1{,}058\,197$	B_z	$-0{,}473\,518$	AB	$-0{,}000\,018$
$P_z \cos\varepsilon$	$-0{,}322\,4556$	$P_y \cos\omega$	$+0{,}904\,1699$	$P_x \cos\omega$	$-0{,}047\,0232$
$-P_y \sin\varepsilon$	$+0{,}372\,0285$	$-Q_y \sin\omega$	$-0{,}028\,0553$	$-Q_x \sin\omega$	$-0{,}249\,6533$
$Q_z \cos\varepsilon$	$-0{,}144\,5661$	$\sin\Omega$	$+0{,}954\,977$	$-P_x \sin\omega$	$-0{,}012\,3698$
$-Q_y \sin\varepsilon$	$-0{,}043\,8823$	$\cos\Omega$	$-0{,}296\,676$	$-Q_x \cos\omega$	$+0{,}949\,0423$
$\sin i \sin\omega$	$+0{,}049\,5729$			Сумма	$+0{,}936\,672$
$\sin i \cos\omega$	$-0{,}188\,4484$			$\cos i \sin\Omega$	$+0{,}936\,671$
$\operatorname{tg}\omega$	$-0{,}263\,058$			1931,0 ω	$165^\circ{,}261\,79$
$\sin\omega$	$+0{,}254\,403$			i	$11{,}236\,54$
$\cos\omega$	$-0{,}967\,098$			Ω	$107{,}258\,10$
$\sin i$	$+0{,}194\,860$				
$\cos i$	$+0{,}980\,831$				

§ 10. Площадь фокального сектора конического сечения

В предыдущих параграфах было показано, что при нахождении орбиты по граничным условиям весьма большое значение имеет отношение площади фокального сектора конического сечения к площади треугольника, образованного радиусами-векторами, ограничивающими этот сектор. При вычислении этого отношения — величины, по существу, чисто геометрической, мы брали для площади фокального сектора значение динамическое, вытекающее из закона площадей. Таким образом, мы избежали выражения площади этого сектора через геометрические условия задачи. Но получение такого геометрического выражения для площади сектора представляет, тем не менее, большой интерес, так как открывает другой путь для нахождения элементов.

Обозначим через r_1 и r_2 радиусы-векторы, ограничивающие сектор, через v_1 и v_2 — соответствующие им истинные аномалии. Удвоенная площадь сектора дается, как известно, формулой

$$(r_1 r_2) = \int\limits_{v_1}^{v_2} r^2\, dv.$$

Остается только вычислить этот интеграл для конического сечения. Для этого удобнее всего, как в случае эллипса, так и в случае гиперболы, выразить r и v через эксцентрическую аномалию. Формулы

$$r = a(1 - e\cos E); \qquad dv = \frac{\sqrt{1-e^2}\, dE}{1 - e\cos E}$$

дают

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1-e^2} \int_{E_1}^{E_2} (1 - e\cos E)\, dE,$$

где через E_1 и E_2 обозначены эксцентрические аномалии, соответствующие границам сектора.

Следовательно,

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1-e^2}\, [E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)] =$$
$$= a^2 \sqrt{1-e^2} \left[E_2 - E_1 - 2e \sin\frac{E_2 - E_1}{2} \cos\frac{E_2 + E_1}{2}\right].$$

Полагая опять, как и в § 6,

$$E_2 - E_1 = 2g; \quad e\cos\frac{E_2 + E_1}{2} = \cos h \quad (0° < h < 180°),$$

получим

$$(r_1 r_2) = 2a^2 \sqrt{1-e^2}\, (g - \sin g \cos h). \tag{10.1}$$

Эта формула решает вопрос о вычислении площади фокального сектора, но она представляет то неудобство, что выражает эту площадь через значения вспомогательной переменной — эксцентрической аномалии. Для исключения этой последней (или, что все равно, углов g и h) воспользуемся прежде всего соотношениями

$$r_1 = a(1 - e\cos E_1), \qquad r_2 = a(1 - e\cos E_2),$$

которые дают

$$r_1 + r_2 = 2a - 2a\cos g \cos h. \tag{10.2}$$

Хорду s, соединяющую концы радиусов-векторов r_1 и r_2, можно выразить через те же углы g и h. В самом деле, так как прямоугольные орбитальные координаты концов хорды равны

$$\xi_1 = a(\cos E_1 - e); \qquad \xi_2 = a(\cos E_2 - e),$$
$$\eta_1 = a\sqrt{1-e^2} \sin E_1; \qquad \eta_2 = a\sqrt{1-e^2} \sin E_2,$$

то

$$s = [(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2]^{1/2} = 2a \sin g \sin h. \tag{10.3}$$

Теперь нам остается только, воспользовавшись полученными формулами, исключить углы g и h из найденного ранее выражения площади сектора.

Равенства (10.2) и (10.3) дают

$$r_1 + r_2 + s = 2a\,[1 - \cos(g + h)]; \quad r_1 + r_2 - s = 2a\,[1 - \cos(g - h)].$$

Полагая

$$h + g = \varepsilon, \quad h - g = \delta,$$

или

$$h = \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta); \quad g = \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta), \tag{10.4}$$

можно последние равенства написать так:

$$\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}; \quad \sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}. \tag{10.5}$$

Вводя теперь углы ε и δ в формулу (10.1), окончательно получим для удвоенной площади сектора такое выражение:

$$(r_1 r_2) = a^2\sqrt{1 - e^2}\,[\varepsilon - \sin\varepsilon - (\delta - \sin\delta)], \tag{10.6}$$

причем ε и δ определяются равенствами (10.5).

Формула (10.6) одинаково применима как для эллипса, так и для гиперболы. Разница будет заключаться только в том, что для гиперболы $a < 0$, $e > 1$ и углы ε и δ будут мнимые. Чтобы избежать употребления мнимых величин, можно было бы ввести новые переменные, полагая $\varepsilon = i\varepsilon_1$, $\delta = i\delta_1$, но мы не будем на этом останавливаться.

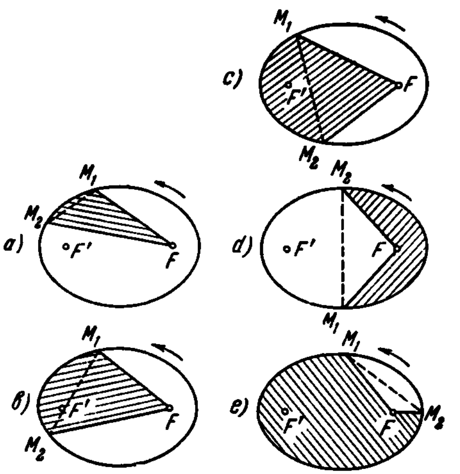

Рис. 12.

Рассмотрим подробнее процесс вычисления площади эллиптического сектора по формуле (10.6). Самый вывод этой формулы показывает, что она обладает полной общностью и потому одинаково применима к секторам всех возможных видов (рис. 12). Нужно только в каждом случае суметь выбрать надлежащим образом углы ε и δ, неоднозначно определяемые формулами (10.5).

Ограничимся случаем, когда угол раствора сектора $2f = v_2 - v_1$ меньше 2π. В таком случае, очевидно, будем иметь

$$2g = E_2 - E_1 < 2\pi$$

и потому

$$0 < g < \pi.$$

Поскольку, с другой стороны, угол h был определен условием

$$0 < h < \pi,$$

мы будем иметь

$$\varepsilon = g + h < 2\pi.$$

Поэтому во всех случаях будет

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Чтобы найти знак $\sin\frac{\delta}{2}$, обратимся к формуле (6.6), которую при помощи равенств (10.4) можно написать так:

$$\sqrt{r_1 r_2}\cos f = 2a\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{\delta}{2}. \tag{10.7}$$

Это соотношение показывает, что

$$\sin\frac{\delta}{2} > 0, \quad \text{если} \quad 0 < 2f < \pi,$$

$$\sin\frac{\delta}{2} < 0, \quad \text{если} \quad \pi < 2f < 2\pi.$$

Для окончательного определения квадрантов, в которых должны находиться углы $\frac{1}{2}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}\delta$, остается найти знаки их косинусов.

Для предельного случая бесконечно узкого сектора, когда $2g = E_2 - E_1 = 0$, имеем $\varepsilon = \delta = h$, следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2},$$

а потому

$$\cos\frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos\frac{\delta}{2} > 0.$$

Когда $\cos\frac{\varepsilon}{2}$ обратится в нуль? В этом случае должно быть

$$\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = 1,$$

следовательно,

$$r_1 + r_2 + s = 4a, \quad \text{или} \quad s = (2a - r_1) + (2a - r_2).$$

Таким образом, $\cos\frac{\varepsilon}{2}$ обращается в нуль тогда, когда хорда M_1M_2 проходит через второй фокус F' (рис. 12, b).

Легко видеть, что всегда

$$\cos\frac{\delta}{2} > 0,$$

ибо обращение этой величины в нуль повлекло бы за собой невозможное равенство

$$r_1 + r_2 - s = 4a.$$

Введем теперь углы ε_0, δ_0, однозначно определяемые равенствами

$$\sin\frac{\varepsilon_0}{2}=\sqrt{\frac{r_1+r_2+s}{4a}};\quad \sin\frac{\delta_0}{2}=\sqrt{\frac{r_1+r_2-s}{4a}}, \tag{10.8}$$

и условиями

$$0<\varepsilon_0<\pi,\qquad 0<\delta_0<\pi.$$

В таком случае произведенное исследование позволяет сформулировать следующие выводы:

1) если сегмеит рассматриваемого сектора ие заключает ни одного фокуса (рис. 12, a), то

$$\varepsilon=\varepsilon_0,\quad \delta=\delta_0,$$

следовательио,

$$(r_1r_2)=a^2\sqrt{1-e^2}\,[\varepsilon_0-\sin\varepsilon_0-(\delta_0-\sin\delta_0)]; \tag{10.9}$$

2) если сегмент заключает второй фокус F', но не содержит первого фокуса F, служащего вершиной сектора (рис. 12, c), то

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}>0,\quad \cos\frac{\varepsilon}{2}<0;\quad \sin\frac{\delta}{2}>0,\quad \cos\frac{\delta}{2}>0,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}\varepsilon=\pi-\frac{1}{2}\varepsilon_0,\quad \frac{1}{2}\delta=\frac{1}{2}\delta_0,$$

а потому

$$(r_1r_2)=a^2\sqrt{1-e^2}\,[2\pi-\varepsilon_0+\sin\varepsilon_0-(\delta_0-\sin\delta_0)]; \tag{10.10}$$

3) если сегмент заключает только фокус F, иаходящийся в вершиие сектора (рис. 12, d), то

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}>0,\quad \cos\frac{\varepsilon}{2}>0;\quad \sin\frac{\delta}{2}<0,\quad \cos\frac{\delta}{2}>0,$$

и, сообразно с этим,

$$\varepsilon=\varepsilon_0,\quad \delta=-\delta_0.$$

Следовательно, в этом сучае

$$(r_1r_2)=a^2\sqrt{1-e^2}\,[\varepsilon_0-\sin\varepsilon_0+(\delta_0-\sin\delta_0)]; \tag{10.11}$$

4) иаконец, если сегмент заключает оба фокуса (рис. 12, e), то

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}>0,\quad \cos\frac{\varepsilon}{2}<0;\quad \sin\frac{\delta}{2}<0,\quad \cos\frac{\delta}{2}>0,$$

а потому

$$\frac{1}{2}\varepsilon=\pi-\frac{1}{2}\varepsilon_0,\quad \frac{1}{2}\delta=-\frac{1}{2}\delta_0.$$

Следовательно,

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1-e^2}\,[2\pi - \varepsilon_0 + \sin\varepsilon_0 + (\delta_0 - \sin\delta_0)]. \qquad (10.12)$$

Формулы (10.8)—(10.12) полностью решают задачу о нахождении площади фокального сектора конического сечения.

Полученные нами формулы позволяют дать чисто геометрическое выражение для отношения площадей сектора и треугольника. Так как

$$\begin{aligned}[r_1 r_2] &= 2(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) = \\ &= a^2\sqrt{1-e^2}\,[\sin E_2(\cos E_1 - e) - \sin E_1(\cos E_2 - e)] = \\ &= a^2\sqrt{1-e^2}\,[\sin 2g - 2\sin g\cos h] = \\ &\qquad = a^2\sqrt{1-e^2}\,[\sin(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)],\end{aligned}$$

то

$$\eta = \frac{(r_1 r_2)}{[r_1 r_2]} = \frac{\varepsilon - \delta - (\sin\varepsilon - \sin\delta)}{\sin(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)}, \qquad (10.13)$$

если ограничиться первым из четырех рассмотренных выше случаев.

§ 11. Теорема Ламберта

При решении астрономических задач приходится иметь дело только с такими эллиптическими секторами, у которых сегмент не заключает «пустого» фокуса, а может заключать лишь тот фокус, в котором находится Солнце. Иначе говоря, из перечисленных в предыдущем параграфе случаев могут встретиться лишь первый и третий.

Соответствующие этим случаям формулы (10.9) и (10.11) можно объединить в одну:

$$(r_1 r_2) = a^2\sqrt{1-e^2}\,[\varepsilon - \sin\varepsilon \mp (\delta - \sin\delta)], \qquad (11.1)$$

где верхний знак берется в том случае, когда угол раствора сектора меньше 180°, а нижний — когда этот угол больше 180°. Величины ε и δ однозначно определяются условиями:

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}; \quad \sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a},\\ &0 < \varepsilon < 180^\circ; \qquad\quad 0 < \delta < 180^\circ.\end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

Если по рассматриваемому коническому сечению происходит движение по законам задачи двух тел, то

$$(r_1 r_2) = \tau\sqrt{a(1-e^2)},$$

где

$$\tau = k(t_2 - t_1),$$