Следовательно,

$$(r_1r_2) = a^2\sqrt{1-e^2}\,[2\pi - \varepsilon_0 + \sin\varepsilon_0 + (\delta_0 - \sin\delta_0)]. \quad (10.12)$$

Формулы (10.8)—(10.12) полностью решают задачу о нахождении площади фокального сектора конического сечения.

Полученные нами формулы позволяют дать чисто геометрическое выражение для отношения площадей сектора и треугольника. Так как

$$\begin{aligned}[r_1r_2] &= 2(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) = \\ &= a^2\sqrt{1-e^2}\,[\sin E_2(\cos E_1 - e) - \sin E_1(\cos E_2 - e)] = \\ &= a^2\sqrt{1-e^2}\,[\sin 2g - 2\sin g\cos h] = \\ &\qquad = a^2\sqrt{1-e^2}\,[\sin(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)],\end{aligned}$$

то

$$\eta = \frac{(r_1r_2)}{[r_1r_2]} = \frac{\varepsilon - \delta - (\sin\varepsilon - \sin\delta)}{\sin(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)}, \quad (10.13)$$

если ограничиться первым из четырех рассмотренных выше случаев.

§ 11. Теорема Ламберта

При решении астрономических задач приходится иметь дело только с такими эллиптическими секторами, у которых сегмент не заключает «пустого» фокуса, а может заключать лишь тот фокус, в котором находится Солнце. Иначе говоря, из перечисленных в предыдущем параграфе случаев могут встретиться лишь первый и третий.

Соответствующие этим случаям формулы (10.9) и (10.11) можно объединить в одну:

$$(r_1r_2) = a^2\sqrt{1-e^2}\,[\varepsilon - \sin\varepsilon \mp (\delta - \sin\delta)], \quad (11.1)$$

где верхний знак берется в том случае, когда угол раствора сектора меньше 180°, а нижний — когда этот угол больше 180°. Величины ε и δ однозначно определяются условиями:

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1+r_2+s}{4a}; \quad &\sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{r_1+r_2-s}{4a}, \\ &0 < \varepsilon < 180°; &0 < \delta < 180°. \end{aligned}\right\} \quad (11.2)$$

Если по рассматриваемому коническому сечению происходит движение по законам задачи двух тел, то

$$(r_1r_2) = \tau\sqrt{a(1-e^2)},$$

где

$$\tau = k(t_2 - t_1),$$

а через t_1 и t_2 обозначены моменты, в которые движущееся тело занимало положения (r_1, v_1) и (r_2, v_2).

Подставив сюда выражение (11.1), получим теорему Ламберта:

$$\tau a^{-3/2} = \varepsilon - \sin\varepsilon \mp (\delta - \sin\delta). \tag{11.3}$$

Эта теорема дает зависимость между четырьмя величинами: большой полуосью орбиты, временем, в течение которого светило переходит из одного положения в другое, суммой радиусов-векторов этих двух положений, и хордой, соединяющей их. Таким образом, если три из этих величин известны, то четвертая может быть найдена.

Легко видеть, что правые части выражений (11.1) и (11.3) могут быть разложены в ряды по отрицательным степеням a.

Действительно, положив для краткости

$$m = \sin\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}},$$

будем иметь

$$\frac{\varepsilon}{2} = \arcsin m = m + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,m^3 + \frac{1}{5}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,m^5 + \ \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\sin\varepsilon = m(1 - m^2)^{1/2} = m - \frac{1}{2}\,m^3 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\,m^5 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,m^7 - \ \ldots,$$

и потому

$$\varepsilon - \sin\varepsilon = 4\left(\frac{1}{3}\,m^3 + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2}\,m^5 + \frac{1}{7}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,m^7 + \ \ldots\right). \tag{11.4}$$

Подстановка этого выражения и аналогичного для $\delta - \sin\delta$ в равенство (11.3) дает

$$\begin{aligned} 6\tau = {} & (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2} + \\ & + \frac{3}{40}\,\frac{1}{a}\left[(r_1 + r_2 + s)^{5/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{5/2}\right] + \\ & + \frac{9}{896}\,\frac{1}{a^2}\left[(r_1 + r_2 + s)^{7/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{7/2}\right] + \\ & + \frac{5}{3072}\,\frac{1}{a^3}\left[(r_1 + r_2 + s)^{9/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{9/2}\right] + \ \ldots \end{aligned} \tag{11.5}$$

Эта форма теоремы Ламберта одинаково удобна и для эллиптических и для гиперболических орбит. Стоящий справа ряд сходится тем лучше, чем больше $|a|$.

Переходя к пределу при $|a| \to \infty$, получим теорему Эйлера

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2}, \tag{11.6}$$

уже найденную нами (§ 8) другим путем.

Соотношение (11.6), сделавшееся основой аналитических методов нахождения кометных орбит, заменивших геометрический метод Ньютона, было опубликовано Эйлером в работе «Определение орбиты кометы, которая наблюдалась главным образом в марте этого 1742 года» [Эйлер, 1743].

Геометрическая теорема, эквивалентная уравнению Эйлера, была известна еще Ньютону. Это было отмечено Лагранжем, но затем забыто. Вновь обратил на это внимание А. Н. Крылов [1911, 1924 и 1936].

Теорема Ламберта (11.3), давшая обобщение теоремы Эйлера для всех случаев невозмущенного движения, была им опубликована в 1761 г. в книге «Замечательные свойства кометных орбит» [Ламберт, 1761].

Чисто геометрическое доказательство Ламберта очень громоздко. Аналитическое доказательство было дано Лагранжем [1778] и затем существенно упрощено Гауссом в Theoria motus [1809].

Глубокие корни, связывающие теорему Ламберта с весьма общими теоремами динамики, наиболее полно освещены Винтнером [1941].

§ 12. Вторая форма уравнения Эйлера

Уравнение Эйлера

$$6\tau=(r_1+r_2+s)^{3/2}\mp(r_1+r_2-s)^{3/2} \tag{12.1}$$

выражает промежуток времени $\tau=k(t_2-t_1)$, в течение которого проходится дуга параболической орбиты, стягиваемая хордой s, через эту хорду и сумму радиусов-векторов в концах дуги.

В тех часто встречающихся случаях, когда предварительная орбита кометы вычисляется в предположении, что комета движется по параболе, уравнение (12.1) служит для выражения этого условия. Таким образом, в процессе вычисления предварительной орбиты приходится в каждом приближении проверять выполнение уравнения (12.1).

Между тем, форма правой части уравнения (12.1) мало удобна для вычисления. Кроме того, поскольку в этом уравнении приходится брать верхний знак (при вычислении предварительной орбиты гелиоцентрическое движение не превосходит 180°), то правую часть приходится часто вычислять как разность двух мало отличающихся по величине чисел, т. е. с большой потерей точности. Покажем, как путем надлежащего преобразования уравнения (12.1) можно избежать этих неудобств.

Ограничиваясь случаем, когда гелиоцентрическое движение кометы меньше 180°, напишем уравнение (12.1) так:

$$6\tau=(r_1+r_2)^{3/2}\left[\left(1+\frac{s}{r_1+r_2}\right)^{3/2}-\left(1-\frac{s}{r_1+r_2}\right)^{3/2}\right],$$

или

$$2\tau=(r_1+r_2)^{3/2}\left[\frac{s}{r_1+r_2}-\frac{1\cdot 1}{4\cdot 6}\left(\frac{s}{r_1+r_2}\right)^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\left(\frac{s}{r_1+r_2}\right)^5-\ldots\right].$$

Возведя обе части в квадрат и положив

$$c=\left(\frac{s}{r_1+r_2}\right)^2,$$