Соотношение (11.6), сделавшееся основой аналитических методов нахождения кометных орбит, заменивших геометрический метод Ньютона, было опубликовано Эйлером в работе «Определение орбиты кометы, которая наблюдалась главным образом в марте этого 1742 года» [Эйлер, 1743].

Геометрическая теорема, эквивалентная уравнению Эйлера, была известна еще Ньютону. Это было отмечено Лагранжем, но затем забыто. Вновь обратил на это внимание А. Н. Крылов [1911, 1924 и 1936].

Теорема Ламберта (11.3), давшая обобщение теоремы Эйлера для всех случаев невозмущенного движения, была им опубликована в 1761 г. в книге «Замечательные свойства кометных орбит» [Ламберт, 1761].

Чисто геометрическое доказательство Ламберта очень громоздко. Аналитическое доказательство было дано Лагранжем [1778] и затем существенно упрощено Гауссом в Theoria motus [1809].

Глубокие корни, связывающие теорему Ламберта с весьма общими теоремами динамики, наиболее полно освещены Винтнером [1941].

§ 12. Вторая форма уравнения Эйлера

Уравнение Эйлера

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2} \tag{12.1}$$

выражает промежуток времени $\tau = k(t_2 - t_1)$, в течение которого проходится дуга параболической орбиты, стягиваемая хордой s, через эту хорду и сумму радиусов-векторов в концах дуги.

В тех часто встречающихся случаях, когда предварительная орбита кометы вычисляется в предположении, что комета движется по параболе, уравнение (12.1) служит для выражения этого условия. Таким образом, в процессе вычисления предварительной орбиты приходится в каждом приближении проверять выполнение уравнения (12.1).

Между тем, форма правой части уравнения (12.1) мало удобна для вычисления. Кроме того, поскольку в этом уравнении приходится брать верхний знак (при вычислении предварительной орбиты гелиоцентрическое движение не превосходит 180°), то правую часть приходится часто вычислять как разность двух мало отличающихся по величине чисел, т. е. с большой потерей точности. Покажем, как путем надлежащего преобразования уравнения (12.1) можно избежать этих неудобств.

Ограничиваясь случаем, когда гелиоцентрическое движение кометы меньше 180°, напишем уравнение (12.1) так:

$$6\tau = (r_1 + r_2)^{3/2} \left[\left(1 + \frac{s}{r_1 + r_2}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{s}{r_1 + r_2}\right)^{3/2} \right],$$

или

$$2\tau = (r_1 + r_2)^{3/2} \left[\frac{s}{r_1 + r_2} - \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 6} \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^5 - \dots \right].$$

Возведя обе части в квадрат и положив

$$c = \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^2,$$

получим

$$(2\tau)^2 = s^2(r_1 + r_2)\left(1 - \frac{1}{24}c - \frac{1}{128}c^2 - \ldots\right)^2.$$

Этому уравнению придадим такой вид:

$$\theta_0(2\tau)^2 = s^2(r_1 + r_2), \qquad (12.2)$$

где

$$\theta_0 = \left(1 - \frac{1}{24}c - \frac{1}{128}c^2 - \ldots\right)^{-2} =$$
$$= 1 + \frac{1}{12}c + \frac{1}{48}c^2 + \frac{7}{864}c^3 + \frac{83}{20\,736}c^4 + \frac{95}{41\,472}c^5 + \frac{1363}{746\,496}c^6 + \ldots$$

Уравнение Эйлера, представленное в форме (12.2), свободно от указанных выше недостатков.

Таблица IX дает θ_0 и $\lg\theta_0$ для $c=0{,}000(0{,}001)0{,}500$.

Заметим, что

$$\theta_0 = \left(\frac{3\sqrt{c}}{(1+\sqrt{c})^{3/2} - (1-\sqrt{c})^{3/2}}\right)^2.$$

Если положить $\sin\gamma = \sqrt{c}$, то это выражение примет вид

$$\theta_0 = \left(\frac{3\sec\frac{1}{2}\gamma}{3 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\gamma}\right)^2.$$

Форма (12.2) уравнения Эйлера [М. Ф. Субботин, 1923] несколько удобнее употреблявшейся ранее формы [Энке, 1833], а именно,

$$s = \zeta\sqrt{\mu}(r_1 + r_2). \qquad (12.3)$$

Вычисленную Энке таблицу, дающую $\zeta = \sqrt{\theta_0}$ по аргументу

$$\sqrt{\mu} = 2\tau(r_1 + r_2)^{-3/2},$$

или ей эквивалентную, можно найти в большинстве сборников вспомогательных таблиц.

§ 13. Применение теоремы Ламберта к нахождению орбиты по двум гелиоцентрическим положениям

Вычисление элементов орбиты распадается, как было показано в предыдущих параграфах, на две части. Угловые элементы i, Ω и аргумент широты $u_1 = v_1 + \omega$ (нужный для получения ω) находятся весьма просто из чисто геометрических соображений. Вычисление остальных элементов и истинной аномалии v_1 находится в зависимости от вычисления пара-