получим

$$(2\tau)^2 = s^2(r_1 + r_2)\left(1 - \frac{1}{24}c - \frac{1}{128}c^2 - \ldots\right)^2.$$

Этому уравнению придадим такой вид:

$$\theta_0(2\tau)^2 = s^2(r_1 + r_2), \tag{12.2}$$

где

$$\theta_0 = \left(1 - \frac{1}{24}c - \frac{1}{128}c^2 - \ldots\right)^{-2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{12}c + \frac{1}{48}c^2 + \frac{7}{864}c^3 + \frac{83}{20\,736}c^4 + \frac{95}{41\,472}c^5 + \frac{1363}{746\,496}c^6 + \ldots$$

Уравнение Эйлера, представленное в форме (12.2), свободно от указанных выше недостатков.

Таблица IX дает θ_0 и $\lg\theta_0$ для $c = 0{,}000(0{,}001)0{,}500$.

Заметим, что

$$\theta_0 = \left(\frac{3\sqrt{c}}{(1+\sqrt{c})^{3/2} - (1-\sqrt{c})^{3/2}}\right)^2.$$

Если положить $\sin\gamma = \sqrt{c}$, то это выражение примет вид

$$\theta_0 = \left(\frac{3\sec\frac{1}{2}\gamma}{3 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\gamma}\right)^2.$$

Форма (12.2) уравнения Эйлера [М. Ф. Субботин, 1923] несколько удобнее употреблявшейся ранее формы [Энке, 1833], а именно,

$$s = \zeta\sqrt{\mu}(r_1 + r_2). \tag{12.3}$$

Вычисленную Энке таблицу, дающую $\zeta = \sqrt{\theta_0}$ по аргументу

$$\sqrt{\mu} = 2\tau(r_1 + r_2)^{-3/2},$$

или ей эквивалентную, можно найти в большинстве сборников вспомогательных таблиц.

§ 13. Применение теоремы Ламберта к нахождению орбиты по двум гелиоцентрическим положениям

Вычисление элементов орбиты распадается, как было показано в предыдущих параграфах, на две части. Угловые элементы i, Ω и аргумент широты $u_1 = v_1 + \omega$ (нужный для получения ω) находятся весьма просто из чисто геометрических соображений. Вычисление остальных элементов и истинной аномалии v_1 находится в зависимости от вычисления параметра p, или эквивалентной ему величины η, определяемой более удобным для решения уравнением.

Уравнение Ламберта открывает другой путь для нахождения элементов второй группы. Оно дает возможность найти большую полуось a, после чего вычисление остальных элементов выполняется очень просто.

Пусть гелиоцентрические положения для моментов t_1 и t_2 даны координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

Вычислив по формулам

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$
$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

радиусы-векторы и хорду, мы можем из уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\tau a^{-3/2} = \varepsilon - \sin\varepsilon \mp (\delta - \sin\delta), \\ &\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}; \quad \sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}, \\ &0 < \varepsilon < \pi; \quad 0 < \delta < \pi, \end{aligned}\right\} \qquad (13.1)$$

даваемых теоремой Ламберта, найти a. Вместе с тем будут известны углы ε и δ, а потому и полуразность эксцентрических аномалий, так как

$$\frac{1}{2}(E_2 - E_1) = g = \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta).$$

С другой стороны, почленное сложение и вычитание равенств

$$r_1 = a(1 - e\cos E_1); \quad r_2 = a(1 - e\cos E_2)$$

дает

$$\left.\begin{aligned} &e\sin\frac{1}{2}(E_1 + E_2) = \frac{r_2 - r_1}{2a}\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(E_2 - E_1), \\ &e\cos\frac{1}{2}(E_1 + E_2) = (1 - 2R)\sec\frac{1}{2}(E_2 - E_1), \end{aligned}\right\} \qquad (13.2)$$

где

$$R = \frac{r_1 + r_2}{4a}.$$

Уравнения (13.2) позволяют найти эксцентриситет e и эксцентрические аномалии E_1 и E_2. По обычным формулам (3.10) и (3.11) вычисляются n и M_0.

Согласие полученного значения n с тем, что дает соотношение

$$n = ka^{-3/2},$$

служит хорошим контролем сделанных вычислений.

Наконец, формула

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E_1=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}E_1$$

дает возможность найти v_1 и тем закончить вычисление ω.

Рассмотрим теперь решение уравнений (13.1) относительно a.

Наибольшее практическое значение имеет случай, встречающийся при изучении таких кометных орбит, у которых эксцентриситет близок к единице. В этом случае углы ε и δ очень малы, и чтобы правую часть первого из уравнений (13.1) было удобно вычислять, это уравнение подвергнем следующему преобразованию.

Введем в рассмотрение функцию $V(\zeta)$, которой мы уже пользовались раньше (§ 4, гл. IV). Она определяется равенствами

$$V(\zeta)=\frac{\sqrt{2}}{4k}\,\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}:\quad \zeta=\sin^2 g \tag{13.3}$$

и дается таблицей VIIa.

Если положить

$$\varepsilon=2g;\quad \delta=2g';\quad \zeta'=\sin^2 g',$$

то будем иметь

$$\zeta=\frac{1}{4a}(r_1+r_2+s);\quad \zeta'=\frac{1}{4a}(r_1+r_2-s),$$

и потому

$$\varepsilon-\sin\varepsilon=\frac{4k}{\sqrt{2}}\zeta^{3/2}V(\zeta);\quad \delta-\sin\delta=\frac{4k}{\sqrt{2}}\zeta'^{3/2}V(\zeta').$$

Таким образом, теорема Ламберта может быть выражена уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{8}(t_2-t_1)&=(r_1+r_2+s)^{3/2}V(\zeta)\mp(r_1+r_2-s)^{3/2}V(\zeta'),\\ \zeta&=\frac{1}{4a}(r_1+r_2+s);\quad \zeta'=\frac{1}{4a}(r_1+r_2-s).\end{aligned}\right\}\tag{13.4}$$

С рассматриваемым нами случаем приходится встречаться при улучшении орбиты, приближенно уже известной. Поэтому промежуток времени t_2-t_1 берется большой, так что хорда s оказывается величиной того же порядка, что и r_1+r_2. Вследствие этого вычисление правой части первого из уравнений (13.4) выполняется без потери точности.

С другой стороны, приближенное значение a уже известно и потому решение уравнений (13.4) выполняется здесь особенно удобно.

Другой, практически интересный случай тот, когда рассматривается планетная орбита, а промежуток времени t_2-t_1 не велик. Здесь углы ε и δ могут быть значительны, но разность $\varepsilon-\delta$ очень мала, так как хорда мала по сравнению с радиусами-векторами. Сообразно с этим поступаем следующим образом.

После того как для данных значений r_1+r_2 и s и принятого значения a по формулам

$$\sin^2\frac{\varepsilon}{2}=\frac{1}{4a}(r_1+r_2+s); \quad \sin^2\frac{\delta}{2}=\frac{1}{4a}(r_1+r_2-s), \tag{13.5}$$

$$0^\circ<\varepsilon<180^\circ, \quad 0^\circ<\delta<180^\circ$$

найдены $\frac{1}{2}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}\delta$, находим с возможной точностью разность этих величин при помощи соотношения

$$\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta)=\frac{s}{2a}, \tag{13.6}$$

являющегося прямым следствием равенств (13.5).

Далее, так как

$$2\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)-(\sin\varepsilon-\sin\delta)=$$
$$=2\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)\left[1-\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta)\right]=\frac{s}{a}\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\varepsilon+\delta),$$

то первому из равенств (13.1), в котором в рассматриваемом случае может иметь место только верхний знак, можно придать такой вид:

$$\tau a^{-3/2}=\frac{s}{a}\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\varepsilon+\delta)+2\left[\frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)-\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)\right].$$

Выразив квадратную скобку через функцию (13.3), окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}\tau a^{-3/2}&=\frac{s}{a}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon+\delta}{4}+\frac{8k}{\sqrt{2}}\zeta^{3/2}V(\zeta),\\ \zeta&=\sin^2\frac{\varepsilon-\delta}{4}; \quad \frac{8k}{\sqrt{2}}=0{,}097\,30977=[8{,}988\,1564].\end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

Значение a варьируется до тех пор, пока правая и левая части этого равенства, вычисляемые при помощи (13.5) и (13.6), не станут равными *).

Другой метод для нахождения a, одинаково пригодный во всех встречающихся на практике случаях, но требующий

*) Изложенный способ применения теоремы Ламберта к нахождению большой полуоси является модификацией способа, данного Пламмером [1906]. До него этот вопрос изучали Март [1865] и М. А. Ковальский [1875].

специальных таблиц [М. Ф. Субботин, 1923 и 1929], основан на представлеиии уравнения Ламберта в форме

$$\frac{1}{4a} = \frac{\theta}{r_1 + r_2} - \frac{s^2}{4\tau^2}, \tag{13.8}$$

являющейся обобщением интеграла энергии. Здесь

$$\theta = R + \frac{16R^3c}{(\varepsilon - \sin\varepsilon - \delta + \sin\delta)^2},$$

причем

$$R = \frac{r_1 + r_2}{4a}; \quad c = \left(\frac{s}{r_1 + r_2}\right)^2.$$

При наличии таблиц, дающих θ по аргументам R и c, уравнение (13.8), представлеиное в форме

$$R = \theta - \frac{s^2}{4\tau^2}(r_1 + r_2),$$

легко решается относительно R способом итерации.