ГЛАВА VI

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Предварительные замечания

Решение задачи двух тел, полученное в гл. III, дает координаты в виде неявных функций времени. Эти выражения позволяют, как мы видели, во всех случаях достаточно удобно вычислять координаты. Однако в том весьма важном случае, когда рассматривается движение по эллиптической орбите с малым эксцентриситетом, для координат могут быть получены выражения совсем другого рода, в виде явных функций времени.

Но как раз этот случай движения и представляет особый интерес при изучении солнечной системы. Действительно, если для Плутона $e=0{,}247$, для Меркурия $e=0{,}206$ и для Марса $e=0{,}093$, то для всех остальных больших планет эксцентриситеты не превышают 0,056. С другой стороны, около 30% малых планет имеют эксцентриситеты, меньшие 0,10, а для 65% малых планет эксцентриситет не превосходит 0,18.

Явные и достаточно удобные выражения координат в функции времени важно иметь не столько для облегчения вычислений, сколько для решения других задач, прежде всего, для изучения возмущенного движения планет.

Различные координаты, могущие служить для определеиия положения светила в эллиптическом движении (например, E, r, v), являются периодическими функциями средней аномалии M, имеющими период 2π. Во всех рассматриваемых нами в дальнейшем случаях эти функции будут разложимы в тригонометрические ряды вида

$$f(M)=A^0+2\sum_{1}^{\infty}(A_k\cos kM+B_k\sin kM), \tag{1.1}$$

сходящиеся для всех значений M.

Более того, поскольку рассматриваемые нами величины $f(M)$ будут всегда (при $e<1$) аналитическими функциями M и e, ряды (1.1) будут сходиться для всех значений M и e, а коэффициенты их будут убывать так, что произведения $A_k k^\alpha$ и $B_k k^\alpha$ при любом показателе α будут стремиться к нулю, когда $k \to \infty$.

Положив

$$A_{-k} = A_k, \quad B_{-k} = -B_k, \quad B_0 = 0,$$

ряд (1.1) можно иаписать так:

$$f(M) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM). \tag{1.2}$$

Так как операции над степенными рядами выполняются проще, нежели над тригонометрическими, часто бывает выгодно заменить ряд (1.2) соответствующим рядом Лорана. Делая

$$z = \exp iM, \quad i = \sqrt{-1},$$

откуда

$$2\cos kM = z^k + z^{-k}; \quad 2\sin kM = -iz^k + iz^{-k},$$

получнм

$$f(M) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k z^k, \tag{1.3}$$

где

$$P_k = A_k - iB_k.$$

Ряд (1.3) сходится внутри кольца, содержащего окружность $|z| = 1$. Известные формулы для коэффициентов ряда (1.1)

$$2\pi A_k = \int_0^{2\pi} f(M) \cos kM\, dM; \qquad 2\pi B_k = \int_0^{2\pi} f(M) \sin kM\, dM$$

дают

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} f(M) z^{-k}\, dM. \tag{1.4}$$

Для тех функций, которые нам придется рассматривать, интегралы (1.4) не могут быть, за редкими исключениями, выражены через элементарные функции, но они очень удобно выражаются через бесселевы функции. Нужные нам свойства этих функций будут рассмотрены в следующем параграфе.

Помимо разложений вида (1.2) по кратным средней аномалии иногда приходится пользоваться аналогичными разложениями по кратным истинной аномалии v или эксцентрической аномалии E. Мы остановимся поэтому и на возникающих здесь задачах перехода от одного вида разложения к другому.