§ 2. Некоторые свойства бесселевых функций

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \exp\left[\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right].$$

При любом конечном не равном нулю значении x она имеет только две особые точки: $z=0$ и $z=\infty$. Поэтому ее разложение в ряд Лорана

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n \tag{2.1}$$

сходится на всей плоскости комплексной переменной z, за исключением точки $z=0$.

Коэффициент $J_n(x)$ в этом разложении называется б е с с е л е в о й ф у н к ц и е й с и н д е к с о м n.

Если в равенстве (2.1) заменить z через $-z^{-1}$, то вследствие единственности разложения функции в ряд Лорана будем иметь

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x); \tag{2.2}$$

заменяя в этом же равенстве x на $-x$, а z на z^{-1}, получим

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x). \tag{2.3}$$

Легко получить разложение функции $J_n(x)$ в степенной ряд. Так как

$$\exp\left(\frac{x}{2} z\right) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!}; \qquad \exp\left(-\frac{x}{2} z^{-1}\right) = \sum_0^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^{\beta} \frac{z^{-\beta}}{\beta!},$$

то перемножение этих рядов дает разложение (2.1) в такой форме:

$$\Phi(z) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} z^{\alpha-\beta}.$$

Соберем здесь члены, имеющие множителем z^n, где $n \geqslant 0$ (соотношение (2.2) показывает, что мы можем ограничиться этим случаем). Для таких членов $\alpha=\beta+n$, а так как $\alpha \geqslant 0$, то мы получим все нужные нам члены, меняя β от 0 до $+\infty$. Итак,

$$J_n(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta!\,(\beta+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\beta}. \tag{2.4}$$

Этот ряд сходится, очевидно, на всей плоскости комплексной переменной x.

Дифференцирование равенства (2.1) по z дает тождество

$$\frac{x}{2}(1+z^{-2})\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} nJ_n(x)\,z^{n-1},$$

откуда, приравняв коэффициенты при z^{n-1}, будем иметь

$$nJ_n(x) = \frac{x}{2}\,[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]. \tag{2.5}$$

С другой стороны, дифференцирование равенства (2.1) по x дает

$$\frac{1}{2}(z - z^{-1})\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)\,z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} J'_n(x)\,z^n.$$

Приравняв здесь коэффициенты при z^n, получим

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}\,[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \tag{2.6}$$

Это равенство позволяет представить производную какого угодно порядка бесселевой функции в виде линейной комбинации таких функций. Так, например,

$$J''_n(x) = \frac{1}{4}\,[J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)].$$

Покажем, что функция $J_n(x)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка. В самом деле, последнее равенство можно написать следующим образом:

$$J''_n(x) = -J_n(x) + \frac{1}{4}\,[J_{n-2}(x) + J_n(x)] + \frac{1}{4}\,[J_n(x) + J_{n+2}(x)],$$

или

$$J''_n(x) + J_n(x) = \frac{1}{2x}\,[(n-1)\,J_{n-1}(x) + (n+1)\,J_{n+1}(x)] =$$
$$= \frac{n}{2x}\,[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] - \frac{1}{2x}\,[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)].$$

Отсюда, пользуясь соотношениями (2.5) и (2.6), получим

$$J''_n(x) + \frac{1}{x}J'_n(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J_n(x) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение, дающее возможность изучать функции $J_n(x)$ для всех как действительных, так и комплексных значений индекса n, является основой общей теории бесселевых функций.

Если в формуле (2.1) положить

$$z = \exp i\varphi,$$

то она примет вид

$$\exp(ix\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)\exp(in\varphi).$$

Пусть x и φ вещественны. Приравнивая вещественные и мнимые части и учитывая соотношения (2.3), получим

$$\left.\begin{aligned}\cos(x\sin\varphi) &= J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi + \ldots,\\ \sin(x\sin\varphi) &= \qquad\quad + 2J_1(x)\sin\varphi + 2J_3(x)\sin 3\varphi + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Замена φ через $\frac{\pi}{2}+\varphi$ дает:

$$\left.\begin{aligned}\cos(x\cos\varphi) &= J_0(x) - 2J_2(x)\cos 2\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi - \ldots,\\ \sin(x\cos\varphi) &= \qquad\quad 2J_1(x)\cos\varphi - 2J_3(x)\cos 3\varphi + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Докажем еще следующую формулу, носящую название интеграла Пуассона,

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x^n}{(2n-1)!!}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\cos(x\cos\varphi)\,d\varphi. \tag{2.9}$$

Для этого заметим, что разложение (2.4) можно написать так:

$$J_n(x) = x^n\sum_0^\infty \frac{(-1)^\beta x^{2\beta}}{(2\beta)!!\,(2n+2\beta)!!} =$$

$$= \frac{x^n}{(2n-1)!!}\sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!\,(2\beta-1)!!}{(2n+2\beta)!!}\,\frac{(-1)^\beta x^{2\beta}}{(2\beta)!},$$

и воспользуемся известной формулой:

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\cos^{2\beta}\varphi\,d\varphi = \pi\frac{(2n-1)!!\,(2\beta-1)!!}{(2n+2\beta)!!}.$$

Это даст

$$J_n(x) = \frac{x^n}{(2n-1)!!}\sum_0^\infty \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\,\frac{(-1)^\beta x^{2\beta}\cos^{2\beta}\varphi}{(2\beta)!}\,d\varphi,$$

откуда и следует справедливость формулы (2.9).

Интеграл Пуассона показывает, что для всех вещественных значений x имеет место неравенство

$$|J_n(x)| < \frac{|x|^n}{(2n-1)!!}, \tag{2.10}$$

дающее очень удобную и достаточно точную верхнюю границу.