§ 3. Вычисление бесселевых функций

В астрономических задачах обычно приходится вычислять все функции $J_0(x)$, $J_1(x)$, ..., которые при рассматриваемом значении x отличны от нуля в пределах принятого числа знаков. Неравенство (2.10) позволяет заранее найти то значение n, до которого при этом надо вести вычисления. Зная n, мы можем применить один из следующих двух способов.

Первый способ. Почленное сложение равенств (2.8) дает

$$F(\varphi)=c_0+c_1\cos\varphi+c_2\cos 2\varphi+\ldots,$$

где

$$F(\varphi)=\cos(x\cos\varphi)+\sin(x\cos\varphi),$$
$$c_0=J_0(x),\quad c_1=2J_1(x),\quad c_2=-2J_2(x),$$
$$c_3=-2J_3(x),\quad c_4=2J_4(x),\quad c_5=\ \ 2J_5(x),\ldots$$

Таким образом, вычислив $F(\varphi)$ для достаточного числа равноотстоящих значений φ и применив обычные формулы гармонического анализа, мы сразу получим $J_0(x)$, $J_1(x)$, ..., $J_n(x)$.

Для контроля можно использовать какие-либо частные случаи формул (2.7) или (2.8), например, одно из равенств

$$1=J_0(x)+2J_2(x)+2J_4(x)+\ldots,$$
$$\cos x=J_0(x)-2J_2(x)+2J_4(x)-\ldots,$$
$$\sin x=\qquad 2J_1(x)-2J_3(x)+2J_5(x)-\ldots$$

Второй способ. Введем в рассмотрение отношения p_k двух смежных бесселевых функций, полагая

$$J_1(x)=p_1J_0(x);\ J_2(x)=p_2J_1(x);\ \ldots$$

Отсюда, опустив для краткости аргумент x, получим

$$J_1=J_0p_1;\quad J_2=J_0p_1p_2;\ \ldots;\ J_n=J_0p_1p_2\ldots p_n. \tag{3.1}$$

Задача приводится, таким образом, к вычислению $J_0(x)$ и к нахождению p_1, p_2, ..., p_n. Обратимся сначала к вычислению этих последних величин. Формула (2.5) дает

$$\frac{2k}{x}=\frac{J_{k-1}}{J_k}+\frac{J_{k+1}}{J_k},$$

откуда

$$\frac{2k}{x}=\frac{1}{p_k}+p_{k+1}. \tag{3.2}$$

Делая здесь $k=n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1$, получим соотношения

$$\frac{1}{p_{n-1}}=\frac{2n-2}{x}-p_n;\qquad \frac{1}{p_{n-2}}=\frac{2n-4}{x}-p_{n-1};\ \ldots;\ \frac{1}{p_1}=\frac{2}{x}-p_2,$$

позволяющие, если p_n известно, удобно и без потери точности найти $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_1$.

Но то же самое равенство (3.2) дает

$$p_n = \frac{1}{\frac{2n}{x} - p_{n+1}}; \qquad p_{n+1} = \frac{1}{\frac{2n+2}{x} - p_{n+2}},$$

так что p_n выражается следующей цепной дробью:

$$p_n = \cfrac{1}{\cfrac{2n}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2n+2}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2n+4}{x} - \ldots}}},$$

которая сходится тем быстрее, чем больше n и чем меньше x.

Вычисление $J_0(x)$ может быть выполнено как при помощи ряда (2.4), так и по формуле (2.9). Кроме того, имеются многочисленные таблицы, дающие $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с большой точностью.

Укажем, например, таблицы, помещенные в фундаментальном трактате Ватсона [1922]. Они дают $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с семью знаками для $x=0{,}00$ $(0{,}02)$ $16{,}00$.

Таблицы Хайаши [1930] дают эти функции с 18 знаками для $x=0{,}000$ $(0{,}001)$ $0{,}110$; с 16 знаками для $x=0{,}12$ $(0{,}01)$ $0{,}50$; и с 12 знаками для $x=0{,}50$ $(0{,}01)$ $25{,}10$.

Сведения о других таблицах можно найти в специальных справочниках [А. В. Лебедев и Р. М. Федорова, 1956].

§ 4. Преобразование тригонометрических рядов по кратным эксцентрической аномалии в ряды по кратным средней аномалии

Рассмотрим аналитическую функцию f эксцентрической аномалии E, имеющую период 2π, а потому разлагающуюся в тригонометрический ряд

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_k \cos kE + b_k \sin kE). \tag{4.1}$$

В силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M \tag{4.2}$$

эта функция будет также разлагаться в ряд

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM). \tag{4.3}$$

Для решения стоящей перед нами задачи преобразования ряда (4.1) в ряд (4.3) заменим оба эти ряда соответствующими