позволяющие, если p_n известно, удобно и без потери точности найти $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_1$.

Но то же самое равенство (3.2) дает

$$p_n = \frac{1}{\frac{2n}{x} - p_{n+1}}; \qquad p_{n+1} = \frac{1}{\frac{2n+2}{x} - p_{n+2}},$$

так что p_n выражается следующей цепной дробью:

$$p_n = \cfrac{1}{\cfrac{2n}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2n+2}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2n+4}{x} - \ldots}}},$$

которая сходится тем быстрее, чем больше n и чем меньше x.

Вычисление $J_0(x)$ может быть выполнено как при помощи ряда (2.4), так и по формуле (2.9). Кроме того, имеются многочисленные таблицы, дающие $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с большой точностью.

Укажем, например, таблицы, помещенные в фундаментальном трактате Ватсона [1922]. Они дают $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с семью знаками для $x=0{,}00$ $(0{,}02)$ $16{,}00$.

Таблицы Хайаши [1930] дают эти функции с 18 знаками для $x=0{,}000$ $(0{,}001)$ $0{,}110$; с 16 знаками для $x=0{,}12$ $(0{,}01)$ $0{,}50$; и с 12 знаками для $x=0{,}50$ $(0{,}01)$ $25{,}10$.

Сведения о других таблицах можно найти в специальных справочниках [А. В. Лебедев и Р. М. Федорова, 1956].

§ 4. Преобразование тригонометрических рядов по кратным эксцентрической аномалии в ряды по кратным средней аномалии

Рассмотрим аналитическую функцию f эксцентрической аномалии E, имеющую период 2π, а потому разлагающуюся в тригонометрический ряд

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_k \cos kE + b_k \sin kE). \tag{4.1}$$

В силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M \tag{4.2}$$

эта функция будет также разлагаться в ряд

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM). \tag{4.3}$$

Для решения стоящей перед нами задачи преобразования ряда (4.1) в ряд (4.3) заменим оба эти ряда соответствующими степенными рядами. Полагая

$$y=\exp iE; \quad z=\exp iM, \tag{4.4}$$

получим

$$f=\sum_{-\infty}^{+\infty} p_k y^k; \quad p_k=a_k-ib_k \tag{4.5}$$

и

$$f=\sum_{-\infty}^{+\infty} P_k z^k; \quad P_k=A_k-iB_k. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.2) показывает, что переменные (4.4) связаны между собой соотношением

$$z=y\exp\left(-\frac{e}{2}y+\frac{e}{2}y^{-1}\right), \tag{4.7}$$

преобразующим окружность $|y|=1$ в окружность $|z|=1$.

Рассмотрим особые точки функции $y(z)$, определяемой этим соотношением. Помимо очевидных особых точек $z=0$ и $z=\infty$, могут еще быть точки разветвления, обращающие в нуль производную

$$\frac{dz}{dy}=\left[1-\frac{e}{2}(y+y^{-1})\right]\exp\left(-\frac{e}{2}y+\frac{e}{2}y^{-1}\right).$$

Действительно, корни этого уравнения

$$y_1=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}; \quad y_2=\frac{1}{y_1}=\frac{e}{1-\sqrt{1-e^2}}$$

дают две точки разветвления:

$$z_1=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\exp(-\sqrt{1-e^2}); \quad z_2=\frac{1}{z_1}.$$

Так как в рассматриваемом нами случае эллиптического движения $0\leqslant e<1$, то $z_1<1<z_2$. Отсюда следует, что функция $y(z)$ разлагается в ряд Лорана, область сходимости которого заключает окружность $|z|=1$. Таким образом, ряд (4.6), получающийся из сходящегося ряда (4.5), будет также сходящимся.

Формула (1.4) дает

$$2\pi P_k=\int_0^{2\pi} fz^{-k}\,dM, \tag{4.8}$$

но из (4.2), (4.4) и (4.7) легко получаем

$$\frac{dM}{dE}=1-\frac{e}{2}(y+y^{-1}); \quad z^{-k}=y^{-k}\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right]. \tag{4.9}$$

Следовательно,

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} f y^{-k} \exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right]\left[1-\frac{e}{2}(y+y^{-1})\right] dE,$$

или

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} F_k y^{-k}\, dE, \tag{4.10}$$

где

$$F_k = f\cdot\left[1-\frac{e}{2}(y+y^{-1})\right]\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right]. \tag{4.11}$$

Сравнивая (4.10) с (4.8), получаем *первое правило Коши*: Для получения коэффициента P_k ряда (4.6) надо функцию F_k, в которой f заменено рядом (4.5), разложить по степеням y. Коэффициент при y^k в этом разложении будет равен P_k.

Можно идти несколько иным путем. Так как

$$\frac{dz^{-k}}{dM} = -kz^{-k-1}\frac{dz}{dM} = -ikz^{-k}$$

иначе говоря

$$z^{-k} = \frac{i}{k}\frac{dz^{-k}}{dM},$$

то формулу (4.8) можно написать так:

$$2\pi P_k = \frac{i}{k}\int_0^{2\pi} f\frac{dz^{-k}}{dM}\, dM.$$

Интегрирование по частям и последующий переход к переменной интегрирования E дают

$$2\pi P_k = -\frac{i}{k}\int_0^{2\pi} z^{-k}\frac{df}{dM}\, dM = -\frac{i}{k}\int_0^{2\pi} z^{-k}\frac{df}{dE}\, dE.$$

Подставляя сюда выражение (4.7) и замечая, что

$$\frac{df}{dE} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dE} = iy\frac{df}{dy},$$

окончательно получим

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} G_k y^{-(k-1)}\, dy,$$

где

$$G_k = \frac{1}{k}\frac{df}{dy}\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right]. \tag{4.12}$$

Это дает *второе правило Коши*:

Для получения коэффициента при z^k в ряде (4.6) надо функцию G_k разложить по степеням y и взять коэффициент при y^{k-1}.

Какое из двух правил Коши окажется более удобным, зависит от структуры функции f. Заметим только, что второе правило неприменимо для нахождения коэффициента P_0.

Так как функции, которые приходится разлагать, почти всегда очень просто выражаются через $y+y^{-1}$ и $y-y^{-1}$, то применение указанных правил естественно приводит к употреблению чисел Коши: так называются коэффициенты $N_{-p,\,j,\,q}$ в разложении

$$(t+t^{-1})^j(t-t^{-1})^q=\sum_{-\infty}^{+\infty} N_{-p,\,j,\,q}t^p,$$

где j и q — целые, не отрицательные числа.

Это равенство показывает, что

$$N_{-p,\,j,\,q}=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad j+q-p=0, \\ 0, & \text{если} \quad j+q-p<0 \text{ или равно нечетному числу.}\end{cases}$$

Мы можем, следовательно, положить

$$j+q-p=2r,$$

где r — целое неотрицательное число.

Рассмотрим сначала вычисление чисел Коши в случае, когда $j=0$. Так как

$$(t-t^{-1})^q=\sum_{\beta=0}^{q}(-1)^\beta\frac{q!}{\alpha!\,\beta!}\,t^{\alpha-\beta},$$

где $\alpha+\beta=q$, то полагая $\alpha-\beta=p$, получим

$$N_{-p,\,0,\,q}=(-1)^r\frac{q!}{r!\,(p+r)!}; \quad (2r=q-p).$$

Для случая, когда $j>0$, можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$N_{-p,\,j+1,\,q}=N_{-p+1,\,j,\,q}+N_{-p-1,\,j,\,q},$$

непосредственно вытекающим из очевидного тождества

$$(t+t^{-1})^{j+1}(t-t^{-1})^q=t(t+t^{-1})^j(t-t^{-1})^q+t^{-1}(t+t^{-1})^j(t-t^{-1})^q.$$

Столь же просто доказывается формула

$$N_{p,\,j,\,q}=(-1)^q N_{-p,\,j,\,q}.$$

В заключение отметим, что числа Коши выражаются через гипергеометрические полиномы:

$$N_{-p,\,j,\,q}=\frac{j!}{r!\,(j-r)!}F(-q,\ -r,\ j-r+1;\ -1),$$

что и является источником многочисленных соотношений, связывающих эти числа.

Подробные сведения о числах Коши и об их применении содержит работа Бурже [1863].

§ 5. Разложение некоторых основных функций

В качестве простейшего примера применения изложенных в предыдущем параграфе методов рассмотрим разложение функции

$$\frac{a}{r}=(1-e\cos E)^{-1}=\left[1-\frac{e}{2}(y+y^{-1})\right]^{-1}.$$

Чтобы применить первое правило Коши, составим по формуле (4.11) соответствующую функцию

$$F_k=\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right]=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(ke)\,y^n.$$

Разложение этой функции по степеням y показывает, что

$$P_k=J_k(ke),$$

а потому

$$\frac{a}{r}=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_k(ke)\,z^k.$$

Пользуясь формулами (2.2), (2.3) и (4.4), этот ряд можно написать так:

$$\frac{a}{r}=1+2\sum_{1}^{\infty}J_k(ke)\cos kM. \tag{5.1}$$

Найдем разложения функций $\cos mE$ и $\sin mE$, где m — целое число. Для этого рассмотрим функцию

$$f=\exp imE=y^m$$

и положим

$$y^m=\sum_{-\infty}^{+\infty}P_k^m z^k.$$

Все коэффициенты P_k^m при $k\neq 0$ мы получим, согласно второму правилу, взяв коэффициент при y^{k-1} в разложении