В заключение отметим, что числа Коши выражаются через гипергеометрические полиномы:

$$N_{-p,j,q}=\frac{j!}{r!(j-r)!}F(-q,\ -r,\ j-r+1;\ -1),$$

что и является источником многочисленных соотношений, связывающих эти числа.

Подробные сведения о числах Коши и об их применении содержит работа Бурже [1863].

§ 5. Разложение некоторых основных функций

В качестве простейшего примера применения изложенных в предыдущем параграфе методов рассмотрим разложение функции

$$\frac{a}{r}=(1-e\cos E)^{-1}=\left[1-\frac{e}{2}(y+y^{-1})\right]^{-1}.$$

Чтобы применить первое правило Коши, составим по формуле (4.11) соответствующую функцию

$$F_k=\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right]=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n(ke)\,y^n.$$

Разложение этой функции по степеням y показывает, что

$$P_k=J_k(ke),$$

а потому

$$\frac{a}{r}=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_k(ke)\,z^k.$$

Пользуясь формулами (2.2), (2.3) и (4.4), этот ряд можно написать так:

$$\frac{a}{r}=1+2\sum_{1}^{\infty}J_k(ke)\cos kM. \tag{5.1}$$

Найдем разложения функций $\cos mE$ и $\sin mE$, где m — целое число. Для этого рассмотрим функцию

$$f=\exp imE=y^m$$

и положим

$$y^m=\sum_{-\infty}^{+\infty}P_k^m z^k.$$

Все коэффициенты P_k^m при $k\neq 0$ мы получим, согласно второму правилу, взяв коэффициент при y^{k-1} в разложении функции, определяемой формулой (4.12), т. е.

$$G_k = \frac{m}{k} y^{m-} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(ke) y^n.$$

Таким образом, если $k \neq 0$, то

$$P_k^m = \frac{m}{k} J_{k-m}(ke).$$

Чтобы найти P_0^m, воспользуемся первым правилом Коши. Формула (4.11) дает

$$F_0 = y^m \left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right].$$

Отсюда видно, что $P_0^1 = -\frac{e}{2}$ и $P_0^m = 0$, если $m > 1$. Все это дает следующие разложения

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} J_{k-1}(ke) \cos kM,$$

$$\cos mE = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{k} J_{k-m}(ke) \cos kM \qquad (m > 1),$$

$$\sin mE = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{k} J_{k-m}(ke) \sin kM \qquad (m \geqslant 1).$$

Если $m > 1$, то полученные ряды можно представить в таком виде:

$$\cos mE = \sum_{1}^{\infty} \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)] \cos kM, \tag{5.2}$$

$$\sin mE = \sum_{1}^{\infty} \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)] \sin kM. \tag{5.3}$$

Если же $m = 1$, то формулы (2.5) и (2.6) позволяют написать их еще проще:

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k'(ke) \cos kM, \tag{5.4}$$

$$\sin E = \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{ke} J_k(ke) \sin kM. \tag{5.5}$$

Подстановка двух последних разложений в равенства

$$E - e\sin E = M, \quad r = a(1 - e\cos E)$$

дает

$$E = M + \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin kM, \tag{5.6}$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \sum_{1}^{\infty} \frac{2e}{k} J'_k(ke) \cos kM. \tag{5.7}$$

Последнюю формулу, особенно часто встречающуюся в приложениях, дадим в развернутом виде. Напишем ее так:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \sum_{1}^{\infty} G_k \cos kM;$$

тогда

$$G_1 = 2\left(\frac{e}{2}\right) - 3\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{7}{72}\left(\frac{e}{2}\right)^7 + \frac{9}{1440}\left(\frac{e}{2}\right)^9 - \ldots,$$

$$G_2 = 2\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{16}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{e}{2}\right)^6 - \frac{64}{45}\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \ldots,$$

$$G_3 = 3\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{45}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{567}{40}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \frac{729}{80}\left(\frac{e}{2}\right)^9 + \ldots,$$

$$G_4 = \frac{16}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{128}{5}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{2048}{45}\left(\frac{e}{2}\right)^8 - \ldots,$$

$$G_5 = \frac{125}{12}\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{4375}{72}\left(\frac{e}{2}\right)^7 + \frac{15\,625}{112}\left(\frac{e}{2}\right)^9 - \ldots,$$

$$G_6 = \frac{108}{5}\left(\frac{e}{2}\right)^6 - \frac{5184}{35}\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \ldots,$$

$$G_7 = \frac{16\,807}{360}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \frac{117\,649}{320}\left(\frac{e}{2}\right)^9 + \ldots,$$

$$G_8 = \frac{32\,768}{315}\left(\frac{e}{2}\right)^8 - \ldots;$$

$$G_9 = \frac{531\,441}{2240}\left(\frac{e}{2}\right)^9 - \ldots.$$

Выписав логарифмы коэффициентов, будем иметь *)

$$G_1 = e - [9{,}574\,0313]\,e^3 + [8{,}415\,6688]\,e^5 - [6{,}880]\,e^7 + \ldots,$$

$$G_2 = [9{,}698\,9700]\,e^2 - [9{,}522\,8787]\,e^4 + [8{,}795\,88]\,e^6 - [7{,}7447]\,e^8 + \ldots$$

---

*) В таком виде это разложение, а также разложение (6.5), было дано Ф. Шубертом [1798]. Разложения (5.6) и (5.7), имеющие фундаментальное значение для теоретической астрономии, были найдены Лагранжем в 1769 г. Общая форма коэффициентов рассматриваемых разложений легко получается при помощи бесселевых функций многих переменных [Акимов, 1929].

$$
\begin{aligned}
G_3 &= [9{,}574\,0313]\,e^3-[9{,}546\,0025]\,e^5+[9{,}044\,313]\,e^7-[8{,}25]\,e^9+\ldots,\\
G_4 &= [9{,}522\,8787]\,e^4-[9{,}602\,0600]\,e^6+[9{,}249\,88]\,e^8-[8{,}627]\,e^{10}+\ldots,\\
G_5 &= [9{,}512\,5788]\,e^5-[9{,}676\,436]\,e^7+[9{,}435\,33]\,e^9-[8{,}938]\,e^{11}+\ldots,\\
G_6 &= [9{,}528\,2738]\,e^6-[9{,}762\,357]\,e^8+[9{,}6094]\,e^{10}-[9{,}211]\,e^{12}+\ldots,\\
G_7 &= [9{,}561\,98]\,e^7-[9{,}856\,17]\,e^9+[9{,}7762]\,e^{11}-\ \ldots,\\
G_8 &= [9{,}6089]\,e^8-[9{,}9557]\,e^{10}+[9{,}938]\,e^{12}-\ \ldots,\\
G_9 &= [9{,}6659]\,e^9-[10{,}0595]\,e^{11}+[10{,}096]\,e^{13}-\ \ldots,\\
G_{10} &= [9{,}731]\,e^{10}-[10{,}167]\,e^{12}+\ \ldots,\\
G_{11} &= [9{,}8025]\,e^{11}-[10{,}277]\,e^{13}+\ \ldots,\\
G_{12} &= [9{,}879]\,e^{12}-\ \ldots,\\
G_{13} &= [9{,}961]\,e^{13}-\ \ldots
\end{aligned}
$$

(из характеристик всех логарифмов надо вычесть 10).

Выведенные нами формулы позволяют получить много других разложений. Так, например, соотношение

$$1+e\cos v=(1-e^2)\frac{a}{r}$$

позволяет из (5.1) вывести ряд

$$\cos v=-e+\frac{2(1-e^2)}{e}\sum_1^{\infty}J_k(ke)\cos kM. \qquad (5.8)$$

Чтобы найти разложение $\sin v$, заметим, что

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right)=e\sin E\frac{dE}{dM}=\frac{e\sin E}{1-e\cos E}=\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin v,$$

и воспользуемся формулой (5.7). Это даст

$$\sin v=2\sqrt{1-e^2}\sum_1^{\infty}J'_k(ke)\sin kM. \qquad (5.9)$$

Еще одно полезное разложение дает соотношение

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right)^2=\frac{d}{dM}(1-e\cos E)^2=2e\sin E.$$

После подстановки сюда выражения (5.5) и интегрирования будем иметь

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2=C-\sum_1^{\infty}\frac{4}{k^2}J_k(ke)\cos kM. \qquad (5.10)$$

Для нахождения постоянной C нужно только заметить, что

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\cos E + \frac{e^2}{2}\cos 2E,$$

и учесть разложения (5.2) и (5.4). Это дает $C = 1 + \frac{3}{2}e^2$.

Примечание. В разложениях, выведенных в этом параграфе, так же как и в большинстве астрономических приложений, бесселевы функции встречаются чаще всего в двух следующих формах:

$$\frac{2}{e}J_k(ke) = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \times \left[1 - \frac{k^2e^2}{2\cdot(2k+2)} + \frac{k^4e^4}{2\cdot4\cdot(2k+2)(2k+4)} - \ldots\right],$$

$$2J'_k(ke) = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \times \left[1 - \frac{k+2}{k}\,\frac{k^2e^2}{2\cdot(2k+2)} + \frac{k+4}{k}\,\frac{k^4e^4}{2\cdot4\cdot(2k+2)(2k+4)} - \ldots\right].$$

Отметим следующие частные случаи, которые особенно полезно иметь в готовом виде:

$$\frac{2}{e}J_1(e) = 1 - \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{192} - \frac{e^6}{9216} + \ldots,$$

$$\frac{2}{e}J_2(2e) = e\left(1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{24} - \frac{e^6}{360} + \ldots\right),$$

$$\frac{2}{e}J_3(3e) = \frac{9e^2}{8}\left(1 - \frac{9e^2}{16} + \frac{81e^4}{640} - \ldots\right),$$

$$\frac{2}{e}J_4(4e) = \frac{4e^3}{3}\left(1 - \frac{4e^2}{5} + \frac{4e^4}{15} - \ldots\right),$$

$$\frac{2}{e}J_5(5e) = \frac{625e^4}{384}\left(1 - \frac{25e^2}{24} + \frac{625e^4}{1344} - \ldots\right),$$

$$\frac{2}{e}J_6(6e) = \frac{81e^5}{40}\left(1 - \frac{9e^2}{7} + \frac{81e^4}{112} - \ldots\right),$$

. . . .

$$2J'_1(e) = 1 - \frac{3e^2}{8} + \frac{5e^4}{192} - \frac{7e^6}{9216} + \ldots,$$

$$2J'_2(2e) = e\left(1 - \frac{2e^2}{3} + \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{90} + \ldots\right),$$

$$2J'_3(3e) = \frac{9e^2}{8}\left(1 - \frac{15e^2}{16} + \frac{189e^4}{640} - \ldots\right),$$

$$2J'_4(4e) = \frac{4e^3}{3}\left(1 - \frac{6e^2}{5} + \frac{8e^4}{15} - \ldots\right),$$

$$2J'_5(5e) = \frac{625e^4}{384}\left(1 - \frac{35e^4}{24} + \frac{375e^4}{448} - \ldots\right).$$

$$2J'_6(6e) = \frac{81e^5}{40}\left(1 - \frac{12e^2}{7} + \frac{135e^4}{112} - \ldots\right).$$

Соотношения

$$(1 \pm e)^{-1} = \sum_{1}^{\infty} (\mp 1)^{k-1} \frac{2}{e} J_k(ke),$$

$$(1 \pm e)^{-2} = \sum_{1}^{\infty} (\mp 1)^{k-1} 2kJ'_k(ke),$$

на доказательстве которых мы не будем останавливаться, могут служить для контроля.

§ 6. Уравнение центра

Уравнением центра называется разность между истинной аномалией и средней аномалией. Чтобы получить эту величину в виде явной функции времени, выразим сначала истинную аномалию через эксцентрическую. Для этого решим уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \tag{6.1}$$

при помощи формулы (9.8) гл. IV. Получим

$$v = E + 2\left[\beta \sin E + \frac{1}{2}\beta^2 \sin 2E + \ \dots\right], \tag{6.2}$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}. \tag{6.3}$$

Полезно отметить, что из соотношения (6.1), написанного в форме

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2},$$

получается разложение

$$E = v - 2\left[\beta \sin v - \frac{1}{2}\beta^2 \sin 2v + \frac{1}{3}\beta^3 \sin 3v - \dots\right]. \tag{6.4}$$

Замена в равенстве (6.2) E, $\sin E$, $\sin 2E$, ... их выражениями (5.3), (5.6) дает следующую весьма важную формулу для уравнения центра:

$$v - M = H_1 \sin M + H_2 \sin 2M + \ \dots, \tag{6.5}$$

где

$$H_1 = 4\left(\frac{e}{2}\right) - 2\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{107}{36}\left(\frac{e}{2}\right)^7 + \ \dots.$$

$$H_2 = 5\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{22}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{17}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \ \dots,$$

$$H_3 = \frac{26}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{43}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{95}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \ \dots,$$