Соотношения

$$(1 \pm e)^{-1} = \sum_{1}^{\infty} (\mp 1)^{k-1} \frac{2}{e} J_k(ke),$$

$$(1 \pm e)^{-2} = \sum_{1}^{\infty} (\mp 1)^{k-1} 2kJ'_k(ke),$$

на доказательстве которых мы не будем останавливаться, могут служить для контроля.

§ 6. Уравнение центра

Уравнением центра называется разность между истинной аномалией и средней аномалией. Чтобы получить эту величину в виде явной функции времени, выразим сначала истинную аномалию через эксцентрическую. Для этого решим уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \tag{6.1}$$

при помощи формулы (9.8) гл. IV. Получим

$$v = E + 2\left[\beta \sin E + \frac{1}{2}\beta^2 \sin 2E + \ldots\right], \tag{6.2}$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}. \tag{6.3}$$

Полезно отметить, что из соотношения (6.1), написанного в форме

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2},$$

получается разложение

$$E = v - 2\left[\beta \sin v - \frac{1}{2}\beta^2 \sin 2v + \frac{1}{3}\beta^3 \sin 3v - \ldots\right]. \tag{6.4}$$

Замена в равенстве (6.2) E, $\sin E$, $\sin 2E$, ... их выражениями (5.3), (5.6) дает следующую весьма важную формулу для уравнения центра:

$$v - M = H_1 \sin M + H_2 \sin 2M + \ldots, \tag{6.5}$$

где

$$H_1 = 4\left(\frac{e}{2}\right) - 2\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{107}{36}\left(\frac{e}{2}\right)^7 + \ldots.$$

$$H_2 = 5\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{22}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{17}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \ldots,$$

$$H_3 = \frac{26}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{43}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{95}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \ldots,$$

$$H_4=\frac{103}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^4-\frac{902}{15}\left(\frac{e}{2}\right)^6+\ldots,$$

$$H_5=\frac{1097}{30}\left(\frac{e}{2}\right)^5-\frac{5957}{36}\left(\frac{e}{2}\right)^7+\ldots,$$

$$H_6=\frac{1223}{15}\left(\frac{e}{2}\right)^6-\ldots,$$

$$H_7=\frac{47\,273}{252}\left(\frac{e}{2}\right)^7-\ldots$$

Приведем еще значения H_1, H_2, ... в секундах дуги, причем вместо числовых коэффициентов дадим их логарифмы:

$$\begin{aligned}
H_1 &= [5{,}615455129]\,e-[4{,}7123651]\,e^3+[4{,}031124]\,e^5+\\
&\qquad +[3{,}6803]\,e^7+[3{,}541]\,e^9+\ldots,\\
H_2 &= [5{,}411335146]\,e^2-[4{,}9756066]\,e^4+[4{,}26157]\,e^6+\\
&\qquad +[3{,}1875]\,e^6+\ldots,\\
H_3 &= [5{,}34918724]\,e^3-[5{,}1417136]\,e^5+[4{,}58288]\,e^7-[3{,}514]\,e^9+\ldots,\\
H_4 &= [5{,}3449911]\,e^4-[5{,}28736]\,e^6+[4{,}8682]\,e^8-[4{,}14]\,e^{10}+\ldots,\\
H_5 &= [5{,}3723605]\,e^5-[5{,}42594]\,e^7+[5{,}120]\,e^9-[4{,}554]\,e^{11}+\ldots,\\
H_6 &= [5{,}41958]\,e^6-[5{,}5615]\,e^6+[5{,}348]\,e^{10}-\ldots,\\
H_7 &= [5{,}48043]\,e^7-[5{,}69557]\,e^9+[5{,}56]\,e^{11}-\ldots,\\
H_8 &= [5{,}5512]\,e^8-[5{,}829]\,e^{10}+[5{,}76]\,e^{12}-\ldots,\\
H_9 &= [5{,}62953]\,e^9-[5{,}9618]\,e^{11}+[5{,}952]\,e^{13}-\ldots,\\
H_{10} &= [5{,}7138]\,e^{10}-[6{,}094]\,e^{12}+\ldots,\\
H_{11} &= [5{,}8028]\,e^{11}-[6{,}227]\,e^{13}+\ldots,\\
H_{12} &= [5{,}896]\,e^{12}-\ldots,\\
H_{13} &= [5{,}992]\,e^{13}-\ldots
\end{aligned}$$

Примечание. Коэффициенты ряда (6.5) имеют весьма сложную структуру. Несравненно проще выражаются коэффициенты разложения уравнения центра по кратным истинной аномалии. Чтобы вывести такое разложение, обратимся к формулам

$$M=E-e\sin E;\qquad \sin E=\frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin v}{1+e\cos v},$$

которые дают

$$M=E+\sqrt{1-e^2}\,\frac{d}{dv}\ln(1+e\cos v).$$

Так как, полагая $x=\exp(iv)$, имеем

$$1+e\cos v=\frac{e}{2\beta}(1+\beta x)(1+\beta x^{-1}),$$

то

$$\ln(1+e\cos v)=\ln\frac{e}{2\beta}+2\left(\beta\cos v-\frac{1}{2}\beta^2\cos 2v+\ \ldots\right),$$

и потому

$$M=E+2\sqrt{1-e^2}\,(-\beta\sin v+\beta^2\sin 2v-\beta^3\sin 3v+\ \ldots).$$

Заменив здесь E выражением (6.4), окончательно получим

$$M=v+2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\beta^k\left(1+k\sqrt{1-e^2}\right)\sin kv. \qquad (6.6)$$

§ 7. Разложение некоторых функций, встречающихся в теории возмущенного движения

При изучении возмущенного движения планет употребляются разложения по кратным средней аномалии функций

$$\left(\frac{r}{a}-1\right)^p\left(\frac{r}{a}\right)^n\frac{\sin}{\cos}\,m(v-M), \qquad (7.1)$$

где p, n и m — целые числа, причем p и m принимают только положительные и равные нулю значения.

Вычисление коэффициентов разложений таких функций до определенной степени e не представляет никаких трудностей. Имеем, например,

$$\left(\frac{r}{a}-1\right)^p\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin m(v-M)=$$
$$=\left(\frac{r}{a}-1\right)^p\left(\frac{r}{a}\right)^n\left\{m(v-M)-\frac{1}{6}m^3(v-M)^3+\ \ldots\right\}.$$

Заменяя здесь r/a и $v-M$ рядами (5.7) и (6.5), получим требуемый результат.

Коэффициенты разложений функций (7.1), вычисленные до e^7, дает Леверрье [1855]. Кэли [1861] дал с той же точностью коэффициенты разложений функций

$$\left(\frac{r}{a}-1\right)^p\frac{\sin}{\cos}\,mv$$

для $p=0, 1, \ldots, 7$, $m=0, 1, \ldots, 7$ и функций

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n\frac{\sin}{\cos}\,mv$$

для $n=-5, -4, \ldots, -1, 1, \ldots, 4$; $m=0, 1, \ldots, 5$ *).

*) Дальнейшее расширение таблиц Кэли, содержащее в числе прочих разложения функций $(r/a)^n\exp(imf)$ (f — истинная аномалия) с точностью до e^{20}, опубликовано в Astron. Papers, Vol. XVIII, 1965 под названием Expansions in Elliptic Motion Ярнагином (Milton P. Jarnagin, Jr.).