то

$$\ln(1+e\cos v)=\ln\frac{e}{2\beta}+2\left(\beta\cos v-\frac{1}{2}\beta^2\cos 2v+\ \ldots\right),$$

и потому

$$M=E+2\sqrt{1-e^2}\,(-\beta\sin v+\beta^2\sin 2v-\beta^3\sin 3v+\ \ldots).$$

Заменив здесь E выражением (6.4), окончательно получим

$$M=v+2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\beta^k\left(1+k\sqrt{1-e^2}\right)\sin kv. \qquad (6.6)$$

§ 7. Разложение некоторых функций, встречающихся в теории возмущенного движения

При изучении возмущенного движения планет употребляются разложения по кратным средней аномалии функций

$$\left(\frac{r}{a}-1\right)^p\left(\frac{r}{a}\right)^n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, m(v-M), \qquad (7.1)$$

где p, n и m — целые числа, причем p и m принимают только положительные и равные нулю значения.

Вычисление коэффициентов разложений таких функций до определенной степени e не представляет никаких трудностей. Имеем, например,

$$\left(\frac{r}{a}-1\right)^p\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin m(v-M)=$$
$$=\left(\frac{r}{a}-1\right)^p\left(\frac{r}{a}\right)^n\left\{m(v-M)-\frac{1}{6}m^3(v-M)^3+\ \ldots\right\}.$$

Заменяя здесь r/a и $v-M$ рядами (5.7) и (6.5), получим требуемый результат.

Коэффициенты разложений функций (7.1), вычисленные до e^7, дает Леверрье [1855]. Кэли [1861] дал с той же точностью коэффициенты разложений функций

$$\left(\frac{r}{a}-1\right)^p \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, mv$$

для $p=0, 1, \ \ldots, 7$, $m=0, 1, \ \ldots, 7$ и функций

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\, mv$$

для $n=-5, -4, \ \ldots, -1, 1, \ \ldots, 4$; $m=0, 1, \ \ldots, 5$ *).

*) Дальнейшее расширение таблиц Кэли, содержащее в числе прочих разложения функций $(r/a)^n\exp(imf)$ (f — истинная аномалия) с точностью до e^{20}, опубликовано в Astron. Papers, Vol. XVIII, 1965 под названием Expansions in Elliptic Motion Ярнагином (Milton P. Jarnagin, Jr.).

Некоторые, наиболее часто встречающиеся разложения приведены на стр. 737—744 в форме таблиц I и II. Эти таблицы дают коэффициенты при различных степенях e в $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$, фигурирующих в разложениях:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv &= C_0^{n,m} + C_1^{n,m}\cos M + C_2^{n,m}\cos 2M + \ldots, \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv &= S_1^{n,m}\sin M + S_2^{n,m}\sin 2M + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (7.2)$$

Так, например, таблица II показывает, что

$$\left(\frac{r}{a}\right)\sin v = \left(1 - \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{192}e^4 - \frac{457}{9216}e^6 - \ldots\right)\sin M + \\ + \left(\frac{1}{2}e - \frac{5}{12}e^3 + \frac{1}{24}e^5 - \frac{1}{45}e^7 + \ldots\right)\sin 2M + \\ + \left(\frac{3}{8}e^2 - \frac{51}{128}e^4 + \frac{543}{5120}e^6 - \ldots\right)\sin 3M + \ldots$$

Таблицы I и II содержат разложения до e^7. Некоторые из этих разложений, продолженные до e^9, дает Ш. Г. Шараф [1953].

Вместо того, чтобы рассматривать отдельно два разложения (7.2), можно изучать ряд

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k^{n,m} z^k.$$

Коэффициенты $X_k^{n,m}$ этого ряда называются иногда **коэффициентами Ганзена**, так как Ганзен первый дал общие выражения этих величин, представив их в виде рядов, расположенных по степеням β. Ньюком [1895] и Иннес [1904] дали коэффициенты в разложениях $X_m^{n,m}$, $X_{m+1}^{n,m}$, ..., по степеням e в виде полиномов от n и m.

Проще всего эти коэффициенты могут быть получены при помощи первого правила Коши.

Согласно этому правилу $X_k^{n,m}$ будет равняться коэффициенту при y^k в разложении выражения

$$F_k = f\left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right]\exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right].$$

Выразим прежде всего функцию

$$f = \left(\frac{r}{a}\right)^n x^m$$

через y. Мы имеем

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos E = 1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1}).$$

Легко видеть, что

$$\frac{r}{a}=(1+\beta^2)^{-1}(1-\beta y)(1-\beta y^{-1}),$$

где, как и раньше,

$$\beta=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}.$$

С другой стороны, соотношение (6.1) дает

$$x=y(1-\beta y^{-1})(1-\beta y)^{-1}. \tag{7.3}$$

Таким образом,

$$F_k=(1+\beta^2)^{-n-1}y^m(1-\beta y)^{n-m+1}(1-\beta y^{-1})^{n+m+1}\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right].$$

Пользуясь формулой бинома, легко вычислить коэффициенты разложения:

$$(1-\beta y)^{n-m+1}(1-\beta y^{-1})^{n+m+1}=\sum_{k-p=-\infty}^{+\infty}E_{k-p}^{n,m}y^{k-p-m}$$

и получить их в такой форме:

$$E_{k-p}^{n,m}=(-\beta)^{k-p-m}\binom{n-m+1}{k-p-m}\times$$
$$\times\mathrm{F}(k-p-n-1,\ -m-n-1,\ k-p-m+1;\ \beta^2)$$

где через $\mathrm{F}(a, b, c; x)$ обозначена гипергеометрическая функция.

Так как

$$\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right]=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_p(ke)\,y^p,$$

то искомый коэффициент при y^k в разложении функции F_k равен

$$X_k^{n,m}=(1+\beta^2)^{-n-1}\sum_{-\infty}^{+\infty}E_{k-p}^{n,m}J_p(ke).$$

Эта формула позволяет сравнительно очень легко получить разложения коэффициентов $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета.

§ 8. Разложение координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета

Разложения функций вида $F(r, v)$ в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии M, рассмотренные в предыдущих параграфах, сходятся при всех значениях эксцентриситета e. Но при употреблении этих рядов часто приходится поль-