Легко видеть, что

$$\frac{r}{a}=(1+\beta^2)^{-1}(1-\beta y)(1-\beta y^{-1}),$$

где, как и раньше,

$$\beta=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}.$$

С другой стороны, соотношение (6.1) дает

$$x=y(1-\beta y^{-1})(1-\beta y)^{-1}. \tag{7.3}$$

Таким образом,

$$F_k=(1+\beta^2)^{-n-1}y^m(1-\beta y)^{n-m+1}(1-\beta y^{-1})^{n+m+1}\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right].$$

Пользуясь формулой бинома, легко вычислить коэффициенты разложения:

$$(1-\beta y)^{n-m+1}(1-\beta y^{-1})^{n+m+1}=\sum_{k-p=-\infty}^{+\infty}E_{k-p}^{n,m}y^{k-p-m}$$

и получить их в такой форме:

$$E_{k-p}^{n,m}=(-\beta)^{k-p-m}\binom{n-m+1}{k-p-m}\times$$
$$\times\mathrm{F}(k-p-n-1,\ -m-n-1,\ k-p-m+1;\ \beta^2)$$

где через $\mathrm{F}(a, b, c; x)$ обозначена гипергеометрическая функция.

Так как

$$\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right]=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_p(ke)\,y^p,$$

то искомый коэффициент при y^k в разложении функции F_k равен

$$X_k^{n,m}=(1+\beta^2)^{-n-1}\sum_{-\infty}^{+\infty}E_{k-p}^{n,m}J_p(ke).$$

Эта формула позволяет сравнительно очень легко получить разложения коэффициентов $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета.

§ 8. Разложение координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета

Разложения функций вида $F(r, v)$ в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии M, рассмотренные в предыдущих параграфах, сходятся при всех значениях эксцентриситета e. Но при употреблении этих рядов часто приходится пользоваться, вместо точных значений коэффициентов (являющихся сложными функциями e) приближенными значениями; коэффициенты при этом разлагаются по степеням e и все члены, начиная с некоторой определенной степени e, отбрасываются. Таким образом, фактически мы часто употребляем разложения функций $F(r, v)$ по степеням e, причем коэффициенты этих разложений являются периодическими (с периодом 2π) функциями M. Рассмотрим вопрос о сходимости таких степенных рядов при произвольном значении M.

Функцию $F(r, v)$ можно рассматривать как функцию $\Phi(E)$ эксцентрической аномалии, которая в свою очередь является функцией e и M в силу уравнения Кеплера:

$$E - e\sin E = M. \tag{8.1}$$

Для всех нужных нам функций, например, для функций (7.1), соответствующая функция $\Phi(E)$ является либо целой, либо произведением целой на мероморфную функцию $(1 - e\cos E)^n$, где n — целое отрицательное число.

Так как

$$\frac{d}{de}\Phi(E) = \Phi'(E)\frac{\sin E}{1 - e\cos E},$$

то отсюда следует, что особые точки всех таких функций $\Phi(E)$, рассматриваемых как функции e при фиксированном M, удовлетворяют уравнению

$$1 - e\cos E = 0, \tag{8.2}$$

которое должно решаться совместно с (8.1).

Обозначим через e_M тот корень системы уравнений (8.1) и (8.2), который при фиксированном значении M имеет наименьший модуль. Положим

$$|e_M| = \varphi(M).$$

Функция $\Phi(E)$ будет для этого значения M голоморфной внутри круга $|e| < \varphi(M)$.

Наша задача приводится к нахождению наименьшего значения $\varphi(M)$ при изменении M от нуля до 2π.

Это наименьшее значение $\varphi(M)$ может представлять для нас интерес только в том случае, если оно соответствует комплексному значению E. В самом деле, если бы соответствующее значение E_M было вещественно, то уравнение (8.2) дало бы $e_M > 1$.

Итак, положим

$$E_M = \rho + i\sigma,$$

а через $\bar{e}_M$ обозначим комплексное число, сопряженное с e_M.

Дифференцирование очевидного равенства

$$\varphi^2(M) = |e_M|^2 = e_M\bar{e}_M$$

дает

$$\frac{d}{dM}\varphi^2(M) = e_M \frac{d\bar{e}_M}{dM} + \bar{e}_M \frac{de_M}{dM}.$$

Так как

$$\frac{de_M}{dM} = \frac{-1}{\sin E_M}; \quad e_M = \frac{1}{\cos E_M},$$

то

$$\frac{d}{dM}\varphi^2(M) = \frac{-\sin(E_M + \bar{E}_M)}{\sin E_M \cos E_M \sin \bar{E}_M \cos \bar{E}_M} = \frac{-4\sin 2\rho}{\sin^2 2\rho + \operatorname{sh}^2 2\sigma}.$$

Изменение знака этой производной показывает, что при $\rho = 0, \pm\pi, \ldots$ функция $\varphi^2(M)$ имеет максимумы, а при $\rho = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2} \pm \pi, \ldots$ она имеет минимумы. Все максимумы и все минимумы равны между собой, как это видно из равенства (8.2).

Чтобы вычислить значение M, соответствующее $E = \frac{\pi}{2} + i\sigma$, исключим e из уравнений (8.1) и (8.2); это даст

$$M = E - \operatorname{tg} E = \frac{\pi}{2} + i\sigma - i\frac{\operatorname{ch}\sigma}{\operatorname{sh}\sigma}.$$

Поскольку нас интересуют только вещественные значения M, то отсюда следует, что $M = \frac{\pi}{2}$ и

$$\sigma \operatorname{sh}\sigma - \operatorname{ch}\sigma = 0,$$

откуда

$$\sigma = 1{,}199678640257734\ldots,$$

а потому

$$\min \varphi(M) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left|\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma\right)}\right| = \frac{1}{\operatorname{sh}\sigma} = 0{,}6627434193492\ldots$$

Итак, при разложении функций $F(r, v)$ по степеням e, модуль ближайшей к началу координат особой точки равен 0,6627.... Такова, следовательно, нижняя грань радиусов сходимости этих разложений при различных значениях M.

Примечание I. Разложения функций координат эллиптического движения по кратным средней аномалии сходятся для всех значений M и для всех значений e, удовлетворяющих условию

$$0 \leqslant e < 1.$$

Коэффициенты этих тригонометрических рядов являются степенными рядами, сходящимися по крайней мере в том же интервале.

Между тем, расположив эти разложения по степеням e, мы получаем степенные ряды, которые сходятся (при всех значениях M) только в интервале

$$0 \leqslant e < 0{,}6627\ldots$$

Такое изменение области сходимости связано здесь с тем обстоятельством, что входящие в коэффициенты тригонометрических разложений бесселевы функции

$$J_k(ke) = \frac{1}{k!}\left(\frac{ke}{2}\right)^k \left[1 - \frac{k^2e^2}{2(2k+2)} + \ldots\right]$$

представляются своими первыми членами тем менее точно, чем больше k. Отношения второго и последующего членов к первому стремятся, как показывает это выражение, к бесконечности при $k \to \infty$.

Примечание II. Можно показать [Леви-Чивита, 1904], что разложение эксцентрической аномалии E (а следовательно, и всех целых функций от E) по степеням величины

$$\eta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} \exp \sqrt{1-e^2}$$

сходится при всех значениях средней аномалии в интервале $0 \leqslant \eta < 1$, которому соответствует интервал $0 \leqslant e < 1$.

§ 9. Тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии

Разложения координат эллиптического движения в тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии выполняются проще, нежели разложения по кратным средней аномалии. Поэтому такие разложения могут служить промежуточным звеном для получения (при помощи приема, изложенного в § 4) разложений по кратным средней аномалии. Но эти разложения могут иногда представлять и самостоятельный интерес.

Нами уже была получена формула (6.2), дающая разложение истинной аномалии. Чтобы получить разложения других, представляющих наибольший интерес функций, рассмотрим величину

$$X_{n,m} = \left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \left(\frac{r}{a}\right)^n (\cos mv + i \sin mv).$$

Легко видеть, что

$$r = a(1 - e\cos E) = a(1+\beta^2)^{-1}(1-\beta y)(1-\beta y^{-1}).$$