Между тем, расположив эти разложения по степеням e, мы получаем степенные ряды, которые сходятся (при всех значениях M) только в интервале

$$0 \leqslant e < 0{,}6627\ldots$$

Такое изменение области сходимости связано здесь с тем обстоятельством, что входящие в коэффициенты тригонометрических разложений бесселевы функции

$$J_k(ke) = \frac{1}{k!}\left(\frac{ke}{2}\right)^k\left[1 - \frac{k^2e^2}{2(2k+2)} + \ldots\right]$$

представляются своими первыми членами тем менее точно, чем больше k. Отношения второго и последующего членов к первому стремятся, как показывает это выражение, к бесконечности при $k \to \infty$.

Примечание II. Можно показать [Леви-Чивита, 1904], что разложение эксцентрической аномалии E (а следовательно, и всех целых функций от E) по степеням величины

$$\eta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} \exp\sqrt{1-e^2}$$

сходится при всех значениях средней аномалии в интервале $0 \leqslant \eta < 1$, которому соответствует интервал $0 \leqslant e < 1$.

§ 9. Тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии

Разложения координат эллиптического движения в тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии выполняются проще, нежели разложения по кратным средней аномалии. Поэтому такие разложения могут служить промежуточным звеном для получения (при помощи приема, изложенного в § 4) разложений по кратным средней аномалии. Но эти разложения могут иногда представлять и самостоятельный интерес.

Нами уже была получена формула (6.2), дающая разложение истинной аномалии. Чтобы получить разложения других, представляющих наибольший интерес функций, рассмотрим величину

$$X_{n,m} = \left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \left(\frac{r}{a}\right)^n (\cos mv + i\sin mv).$$

Легко видеть, что

$$r = a(1 - e\cos E) = a(1+\beta^2)^{-1}(1-\beta y)(1-\beta y^{-1}).$$

Поэтому, учитывая (7.3), имеем

$$X_{n,m}=(1+\beta^2)^{-n}y^m(1-\beta y)^{n-m}(1-\beta y^{-1})^{n+m}.$$

Но произведение рядов

$$(1-\beta y)^{n-m}=\sum_0^\infty\binom{n-m}{k}(-\beta y)^k,$$

$$(1-\beta y^{-1})^{n+m}=\sum_0^\infty\binom{n+m}{k}(-\beta y^{-1})^k$$

можно написать так:

$$\sum_{l=0}^\infty(-\beta y)^l\sum_{k=0}^\infty\binom{n-m}{k+l}\binom{n+m}{k}\beta^{2k}+$$
$$+\sum_{l=1}^\infty(-\beta y^{-1})^l\sum_{k=0}^\infty\binom{n-m}{k}\binom{n+m}{k+l}\beta^{2k}. \qquad (9.1)$$

А учитывая еще, что

$$\binom{a}{k+l}=\binom{a}{l}\frac{(a-l)(a-l-1)\ldots(a-l-k+1)}{(l+1)(l+2)\ldots(l+k)},$$

мы будем иметь

$$X_{n,m}=(1+\beta^2)^{-n}\left\{S_0y^m+\sum_{l=1}^\infty(-\beta)^l\left[\binom{n-m}{l}S_ly^{m+l}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\binom{n+m}{l}S_l'y^{m-l}\right]\right\}, \qquad (9.2)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
S_0&=1+\frac{n^2-m^2}{1^2}\beta^2+\frac{(n^2-m^2)[(n-1)^2-m^2]}{1^2\cdot2^2}\beta^4+\ldots,\\
S_l&=1+\frac{n-m-l}{l+1}\,\frac{n+m}{1}\beta^2+\\
&\quad+\frac{(n-m-l)(n-m-l-1)}{(l+1)(l+2)}\,\frac{(n+m)(n+m-1)}{1\cdot2}\beta^4+\ldots,\\
S_l'&=1+\frac{n+m-l}{l+1}\,\frac{n-m}{1}\beta^2+\\
&\quad+\frac{(n+m-l)(n+m-l-1)}{(l+1)(l+2)}\,\frac{(n-m)(n-m-1)}{1\cdot2}\beta^4+\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

Легко видеть, что эти выражения являются гипергеометрическими функциями β^2. В самом деле,

$$S_l=F(-n-m,\ -n+m+l,\ l+1;\ \beta^2).$$

Пользуясь известными свойствами этих функций, имеем

$$S_i = (1-\beta^2)^{n+m} F\left(-n-m,\ 1+n-m,\ i+1;\ \frac{-\beta^2}{1-\beta^2}\right) =$$
$$= (1-\beta^2)^{n+m}\left\{1 + \frac{n+m}{1}\,\frac{1+n-m}{i+1}\,\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+m)(n+m-1)}{1\cdot 2}\,\frac{(1+n-m)(2+n-m)}{(i+1)(i+2)}\left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 + \ldots \qquad (9.4)\right.$$

Выражение для S_i' получается отсюда изменением знака m. Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (9.2).

Пусть $m=0$. Воспользовавшись выражениями (9.4) и полагая для краткости

$$F_i = F\left(-n,\ 1+n,\ i+1;\ \frac{-\beta^2}{1-\beta^2}\right),$$

получим

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = \left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n\left[F_0 + \sum_1^\infty (-\beta)^i \binom{n}{i} F_i\cdot(y^i + y^{-i})\right].$$

Так как

$$\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \sqrt{1-e^2},$$

то окончательно будем иметь

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = (1-e^2)^{\frac{n}{2}}\left[F_0 + 2\sum_1^\infty (-\beta)^i \binom{n}{i} F_i \cos iE\right]. \qquad (9.5)$$

Если $n=-1$, то

$$F_i = 1;\quad \binom{-1}{i} = (-1)^i,$$

и потому

$$\frac{a}{r} = (1-e^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + 2\beta\cos E + 2\beta^2\cos 2E + \ldots). \qquad (9.6)$$

Если $n=-2$, то

$$F_i = 1 + \frac{2}{i+1}\,\frac{\beta^2}{1-\beta^2};\quad \binom{-2}{i} = (-1)^i(i+1),$$
$$\binom{-2}{i}F_i = (-1)^i\left(i + \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right) = (-1)^i\left(i + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}\left[1 + 2\sum_1^\infty \beta^i\left(1 + i\sqrt{1-e^2}\right)\cos iE\right]. \qquad (9.7)$$

Полагая в формуле (9.2) $n=0$, $m=1$, и замечая, что в этом случае

$$\binom{-1}{i} S_i = (-1)^i (1-\beta^2); \quad \binom{1}{i} S_i' = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i=1, \\ 0, & \text{если} \quad i>1, \end{cases}$$

будем иметь

$$x = -\beta + (1-\beta^2) \sum_1^\infty \beta^{i-1} y^i,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \cos v &= -\beta + (1-\beta^2) \sum_1^\infty \beta^{i-1} \cos iE, \\ \sin v &= \qquad (1-\beta^2) \sum_1^\infty \beta^{i-1} \sin iE. \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

Преобразование ряда (9.2) в ряд Лорана, расположенный по степеням z (§ 4), приводит наиболее простым путем к разложению функций (7.2) по кратным средней аномалии.

§ 10. Разложение некоторых функций по кратным истинной аномалии

При изучении возмущенного движения иногда бывает выгодно принять истинную аномалию за независимую переменную. В таких случаях приходится пользоваться разложениями по кратным истинной аномалии.

Формула (6.4) дает разложение эксцентрической аномалии. Так как выражения (см. § 6)

$$x = y \frac{1-\beta y^{-1}}{1-\beta y}; \quad y = x \frac{1+\beta x^{-1}}{1+\beta x}$$

отличаются только заменой β на $-\beta$, то делая такую замену в формулах (9.8), получим

$$\left.\begin{aligned} \cos E &= \beta + (1-\beta^2) \sum_1^\infty (-\beta)^{i-1} \cos iv, \\ \sin E &= \qquad (1-\beta^2) \sum_1^\infty (-\beta)^{i-1} \sin iv. \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

Рассмотрим еще разложение функции

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = (1-e^2)^{-n} (1+e\cos v)^n.$$

Легко видеть, что

$$1 + e\cos v = (1+\beta^2)^{-1} (1+\beta x)(1+\beta x^{-1}),$$