Полагая в формуле (9.2) $n=0$, $m=1$, и замечая, что в этом случае

$$\binom{-1}{i} S_i = (-1)^i (1-\beta^2); \quad \binom{1}{i} S_i' = \begin{cases} 1, & \text{если } i=1, \\ 0, & \text{если } i>1, \end{cases}$$

будем иметь

$$x = -\beta + (1-\beta^2) \sum_1^\infty \beta^{i-1} y^i,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \cos v &= -\beta + (1-\beta^2) \sum_1^\infty \beta^{i-1} \cos iE, \\ \sin v &= \phantom{-\beta +{}} (1-\beta^2) \sum_1^\infty \beta^{i-1} \sin iE. \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

Преобразование ряда (9.2) в ряд Лорана, расположенный по степеням z (§ 4), приводит наиболее простым путем к разложению функций (7.2) по кратным средней аномалии.

§ 10. Разложение некоторых функций по кратным истинной аномалии

При изучении возмущенного движения иногда бывает выгодно принять истинную аномалию за независимую переменную. В таких случаях приходится пользоваться разложениями по кратным истинной аномалии.

Формула (6.4) дает разложение эксцентрической аномалии. Так как выражения (см. § 6)

$$x = y\frac{1-\beta y^{-1}}{1-\beta y}; \quad y = x\,\frac{1+\beta x^{-1}}{1+\beta x}$$

отличаются только заменой β на $-\beta$, то делая такую замену в формулах (9.8), получим

$$\left.\begin{aligned} \cos E &= \beta + (1-\beta^2) \sum_1^\infty (-\beta)^{i-1} \cos iv, \\ \sin E &= \phantom{\beta +{}} (1-\beta^2) \sum_1^\infty (-\beta)^{i-1} \sin iv. \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

Рассмотрим еще разложение функции

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = (1-e^2)^{-n} (1+e\cos v)^n.$$

Легко видеть, что

$$1 + e\cos v = (1+\beta^2)^{-1} (1+\beta x)(1+\beta x^{-1}),$$

а потому

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = \frac{(1+\beta^2)^n}{(1-\beta^2)^{2n}}(1+\beta x)^n(1+\beta x^{-1})^n.$$

Произведение двух последних множителей можно получить из выражения (9.1), если положить в нем $m=0$ и изменить знак перед β. Это дает следующую формулу:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^n \left[F_0 + 2\sum_1^\infty \beta^i \binom{n}{i} F_i \cos iv\right], \qquad (10.2)$$

где

$$\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}; \quad F_i = F\left(-n,\ 1+n,\ i+1;\ \frac{-\beta^2}{1-\beta^2}\right).$$

Для $n=-2$ формула (10.2) дает

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_1^\infty (1+i\sqrt{1-e^2})(-\beta)^i \cos iv\right]. \qquad (10.3)$$

Так как интеграл площадей можно написать в форме

$$\frac{dM}{dv} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}},$$

то из формулы (10.3) находим следующее выражение для средней аномалии:

$$M = v + 2\sum_1^\infty \left(k^{-1} + \sqrt{1-e^2}\right)(-\beta)^k \sin kv. \qquad (10.4)$$

Примечание. В разложении (10.4) коэффициент при $\sin v$ равен $-2e$. Это показывает, как и формула (6.5), что при малых эксцентриситетах наибольшее значение $|v-M|$ есть величина порядка $2e$. С другой стороны, из формулы (6.2) или (6.3) видно, что наибольшее значение $|v-E|$ есть величина порядка e. Таким образом, при малых значениях эксцентриситета эксцентрическая аномалия ближе воспроизводит изменения истинной аномалии, нежели средняя.

§ 11. Перемножение тригонометрических рядов

При употреблении выведенных в предыдущих параграфах тригонометрических рядов в теоретических исследованиях эти ряды часто приходится перемножать. Для выполнения этой операции удобен следующий прием, учитывающий структуру коэффициентов перемножаемых рядов. Этот прием был развит в трактате Брауна и Шука [1933], содержащем много интересных в практическом отношении замечаний.