а потому

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = \frac{(1+\beta^2)^n}{(1-\beta^2)^{2n}}(1+\beta x)^n(1+\beta x^{-1})^n.$$

Произведение двух последних множителей можно получить из выражения (9.1), если положить в нем $m=0$ и изменить знак перед β. Это дает следующую формулу:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^n \left[F_0 + 2\sum_1^\infty \beta^i \binom{n}{i} F_i \cos iv\right], \qquad (10.2)$$

где

$$\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}; \quad F_i = F\left(-n,\ 1+n,\ i+1;\ \frac{-\beta^2}{1-\beta^2}\right).$$

Для $n=-2$ формула (10.2) дает

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \sqrt{1-e^2}\left[1 + 2\sum_1^\infty (1+i\sqrt{1-e^2})(-\beta)^i \cos iv\right]. \qquad (10.3)$$

Так как интеграл площадей можно написать в форме

$$\frac{dM}{dv} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}},$$

то из формулы (10.3) находим следующее выражение для средней аномалии:

$$M = v + 2\sum_1^\infty \left(k^{-1} + \sqrt{1-e^2}\right)(-\beta)^k \sin kv. \qquad (10.4)$$

Примечание. В разложении (10.4) коэффициент при $\sin v$ равен $-2e$. Это показывает, как и формула (6.5), что при малых эксцентриситетах наибольшее значение $|v-M|$ есть величина порядка $2e$. С другой стороны, из формулы (6.2) или (6.3) видно, что наибольшее значение $|v-E|$ есть величина порядка e. Таким образом, при малых значениях эксцентриситета эксцентрическая аномалия ближе воспроизводит изменения истинной аномалии, нежели средняя.

§ 11. Перемножение тригонометрических рядов

При употреблении выведенных в предыдущих параграфах тригонометрических рядов в теоретических исследованиях эти ряды часто приходится перемножать. Для выполнения этой операции удобен следующий прием, учитывающий структуру коэффициентов перемножаемых рядов. Этот прием был развит в трактате Брауна и Шука [1933], содержащем много интересных в практическом отношении замечаний.

Рассмотрим два ряда,

$$\left.\begin{aligned} &A_0+2\sum_1^{\infty}(A_k\cos kM+B_k\sin kM),\\ &P_0+2\sum_1^{\infty}(P_k\cos kM+Q_k\sin kM),\end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

у которых каждый коэффициент с индексом k имеет вид

$$e^k(\beta_{0\,k}+\beta_{1\,k}e^2+\beta_{2\,k}e^4+\ \ldots). \tag{11.2}$$

Перемножение таких рядов состоит, очевидно, из трех отдельных операций.

1° Перемножаются две четные функции

$$A=a_0+2\sum e^k a_k\cos kM;\quad P=p_0+2\sum e^k p_k\cos kM.$$

Здесь, как и в дальнейшем, суммирование производится от $k=1$ до $k=+\infty$.

Положив

$$z=e\times\exp iM,$$

получим

$$2e^k\cos kM=z^k+e^{2k}z^{-k};\quad 2e^k\sin kM=-iz^k+ie^{2k}z^{-k},$$

вследствие чего искомое произведение можно написать так:

$$AP=(A'+A'')(P'+P''), \tag{11.3}$$

где

$$A'=a_0+\sum a_k z^k;\quad A''=\sum e^{2k}a_k z^{-k},$$
$$P'=p_0+\sum p_k z^k;\quad P''=\sum e^{2k}p_k z^{-k}.$$

Функция AP, будучи четной, разлагается в ряд, содержащий только косинусы. Поэтому в ее разложении в ряд Лорана коэффициенты при z^k и $e^{2k}z^{-k}$ одинаковы; достаточно, таким образом, найти коэффициент c_k при z^k — произведение будет выражаться рядом

$$AP=c_0+2\sum e^k c_k\cos kM.$$

Но чтобы найти коэффициент при z^k в произведении (11.3), достаточно взять члены

$$A'P'+A'P''+A''P'.$$

Поэтому

$$c_0=a_0p_0+2e^2a_1p_1+2e^4a_2p_2+\ \ldots,$$

$$c_k=(a_0p_k+a_1p_{k-1}+\ \ldots\ +a_kp_0)+\\ +e^2(a_{k+1}p_1+a_1p_{k+1})+e^4(a_{k+2}p_2+a_2p_{k+2})+\ \ldots$$

2° Перемножаются две нечетные функции:

$$B = 2\sum e^k b_k \sin kM; \quad Q = 2\sum e^k q_k \sin kM.$$

Таким же способом получим

$$BQ = c_0 + 2\sum e^k c_k \cos kM,$$

где

$$c_0 = 2e^2 b_1 q_1 + 2e^4 b_2 q_2 + \ldots,$$

$$c_k = -(b_1 q_{k-1} + b_2 q_{k-2} + \ldots + b_{k-1} q_1) + \\ + e^2 (b_{k+1} q_1 + b_1 q_{k+1}) + e^4 (b_{k+2} q_2 + b_2 q_{k+2}) + \ldots$$

3° Перемножаются четная и нечетная функции:

$$A = a_0 + 2\sum e^k a_k \cos kM; \quad Q = 2\sum e^k q_k \sin kM.$$

В этом случае

$$AQ = 2\sum e^k d_k \sin kM,$$

причем только что указанный прием дает

$$d_k = (a_0 q_k + a_1 q_{k-1} + \ldots + a_{k-1} q_1) + \\ + e^2 (a_1 q_{k+1} - a_{k+1} q_1) + e^4 (a_2 q_{k+2} - a_{k+2} q_2) + \ldots$$

Таким образом, если коэффициенты перемножаемых рядов (11.1) имеют форму (11.2), то коэффициенты произведения будут иметь такую же форму.