В случае трех наблюдений, соответствующих значениям индекса $h=0$, 1, 2, система (1.1) будет состоять из девяти уравнений с девятью неизвестными:

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2; a, e, M_0, \Omega, i, \omega.$$

Таким образом, для нахождения орбиты необходимо иметь по крайней мере три наблюдения. Изучение решения указанной системы девяти уравнений покажет, что в общем случае эта система разрешима, так что три наблюдения не только необходимы, но и достаточны. Лишь в некоторых исключительных случаях для получения орбиты нужно иметь не три, а четыре наблюдения.

Гелиоцентрические координаты светила являются весьма сложными функциями элементов орбиты. Поэтому еще Эйлер, впервые поставивший и значительно продвинувший вопрос о решении рассматриваемой системы уравнений, разделил эту задачу на две:

1) нахождение геоцентрических расстояний ρ_0, ρ_1, ρ_2;

2) вычисление элементов орбиты при помощи уже известных геоцентрических расстояний.

Вторую из этих задач мы можем считать уже решенной. В самом деле, зная геоцентрические расстояния, мы можем найти при помощи соотношений (1.1) гелиоцентрические положения для моментов наблюдений. Но уже двух таких положений достаточно (§ 3—9, гл. V) для нахождения элементов орбиты. Остается, таким образом, решить первую задачу.

Чтобы облегчить нахождение геоцентрических расстояний, целесообразно определять орбиту не обычными элементами $a, e, \ldots, \omega$, а положением и скоростью светила в момент t_0, т. е. величинами x_0, y_0, z_0; x'_0, y'_0, z'_0. Через эти величины гелиоцентрические координаты выражаются рядами, расположенными по степеням интервала времени (§ 12, гл. III).

Для небольших интервалов времени между наблюдениями эти ряды быстро сходятся и позволяют дать достаточно простые приближенные выражения для гелиоцентрических координат.

Таким образом, открывается путь для нахождения геоцентрических расстояний последовательными приближениями.

§ 2. Соотношения между координатами трех гелиоцентрических положений светила

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, условимся нулевым индексом отмечать величины, относящиеся к среднему наблюдению, т. е. будем считать, что

$$t_1 < t_0 < t_2.$$

Такая нумерация наблюдений удобна потому, что среднее наблюдение фигурирует в формулах совершенно иначе, нежели крайние.

Для любого момента времени t, достаточно близкого к t_0, координаты светила, движущегося вокруг Солнца по обобщенным законам Кеплера, могут быть представлены рядами (12.3) гл. III, дающими

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\| F(\theta) + \left\| \begin{matrix} x_0' \\ y_0' \\ z_0' \end{matrix} \right\| G(\theta),$$

где через $\theta = k(t - t_0)$ обозначено время, выраженное в единицах, равных $k^{-1} = 58{,}132\,441$ суток.

Поэтому, положив

$$\tau_1 = k(t_2 - t_0); \quad \tau_2 = k(t_0 - t_1), \tag{2.1}$$

и введя для краткости обозначения

$$F(-\tau_2) = F_1; \quad F(\tau_1) = F_2,$$
$$G(-\tau_2) = G_1; \quad G(\tau_1) = G_2,$$

получим

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 F_1 + x_0' G_1; & x_2 &= x_0 F_2 + x_0' G_2, \\ y_1 &= y_0 F_1 + y_0' G_1; & y_2 &= y_0 F_2 + y_0' G_2, \\ z_1 &= z_0 F_1 + z_0' G_1; & z_2 &= z_0 F_2 + z_0' G_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

В дальнейшем мы можем опустить нулевой индекс, отмечающий величины, относящиеся к среднему наблюдению.

Таким образом, полагая

$$u = r^{-3}; \quad u' = -3r^{-4}r'; \quad u'' = 12r^{-5}r'^2 - 3r^{-4}r''; \quad \ldots \tag{2.3}$$

из общих формул (12.4) гл. III получим следующие выражения:

$$F_1 = 1 - \frac{1}{2} u\tau_2^2 + \frac{1}{6} u'\tau_2^3 + \frac{1}{24}(u^2 - u'')\,\tau_2^4 + \ldots,$$

$$G_1 = -\tau_2 + \frac{1}{6} u\tau_2^3 - \frac{1}{12} u'\tau_2^4 - \frac{1}{120}(u^2 - 3u'')\,\tau_2^5 + \ldots,$$

$$F_2 = 1 - \frac{1}{2} u\tau_1^2 - \frac{1}{6} u'\tau_1^3 + \frac{1}{24}(u^2 - u'')\,\tau_1^4 + \ldots,$$

$$G_2 = \tau_1 - \frac{1}{6} u\tau_1^3 - \frac{1}{12} u'\tau_1^4 + \frac{1}{120}(u^2 - 3u'')\,\tau_1^5 + \ldots$$

Исключим из соотношений (2.2) производные x_0', y_0', z_0'. Это дает

$$\left.\begin{aligned} n_1x_1 - x + n_2x_2 = 0, \\ n_1y_1 - y + n_2y_2 = 0, \\ n_1z_1 - z + n_2z_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

где

$$n_1 = \frac{G_2}{F_1G_2 - F_2G_1}; \quad n_2 = \frac{-G_1}{F_1G_2 - F_2G_1}. \tag{2.5}$$

Легко видеть, что

$$F_1G_2 - F_2G_1 = \tau - \frac{1}{6}u\tau^3 + \frac{1}{12}u'(\tau_2 - \tau_1)\tau^3 + \ldots,$$

если аналогично (2.1) положить

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = k(t_2 - t_1).$$

Поэтому, выполнив деление до членов четвертого порядка включительно, будем иметь следующие разложения *):

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau}\Big\{1 + \frac{u}{6}(\tau^2 - \tau_1^2) - \frac{u'}{12}\tau_2(\tau\tau_2 - \tau_1^2) + \\ &\quad + \frac{u^2}{360}(\tau^2 - \tau_1^2)(7\tau^2 - 3\tau_1^2) + \frac{u''}{120}\left[3(\tau^4 - \tau_1^4) - 10\tau_1\tau_2\tau^2\right] + \ldots\Big\}, \\ n_2 &= \frac{\tau_2}{\tau}\Big\{1 + \frac{u}{6}(\tau^2 - \tau_2^2) + \frac{u'}{12}\tau_1(\tau\tau_1 - \tau_2^2) + \\ &\quad + \frac{u^2}{360}(\tau^2 - \tau_2^2)(7\tau^2 - 3\tau_2^2) + \frac{u''}{120}\left[3(\tau^4 - \tau_2^4) - 10\tau_1\tau_2\tau^2\right] + \ldots\Big\} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Подставим сюда значения (2.3) и представим эти выражения в таком наиболее для нас удобном виде:

$$n_1 = n_1^0 + c_1r^{-3}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2r^{-3}, \tag{2.7}$$

где

$$n_1^0 = \frac{\tau_1}{\tau}; \quad n_2^0 = \frac{\tau_2}{\tau}.$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + n_1^0) + \frac{r'}{4r}\,\frac{\tau_1\tau_2(\tau\tau_2 - \tau_1^2)}{\tau} + \ldots, \\ c_2 &= \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + n_2^0) - \frac{r'}{4r}\,\frac{\tau_1\tau_2(\tau\tau_1 - \tau_2^2)}{\tau} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Соотношения (2.4) устанавливают зависимости, существующие между гелиоцентрическими координатами светила для трех

*) Эти разложения до десятых степеней интервалов времени дает Харцер [1901].

моментов наблюдений и интервалами времени между этими моментами. Эти соотношения содержат еще, как показывают формулы (2.7) и (2.8), радиус-вектор светила r для момента среднего наблюдения и его последовательные производные r', r'', ...

Величины n_1 и n_2 имеют простое геометрическое значение. В самом деле, первые два из соотношеиий (2.4) дают

$$n_1 = \frac{xy_2 - x_2y}{x_1y_2 - x_2y_1}; \quad n_2 = \frac{x_1y - xy_1}{x_1y_2 - x_2y_1}. \tag{2.9}$$

Выражения, стоящие здесь в числителях и знаменателях, представляют удвоенные площади проекции треугольников, заключенных между тремя радиусами-векторами r_1, r, r_2 на координатную плоскость xy. Поэтому если удвоенные площади этих треугольников обозначить через $[r_1r]$, $[rr_2]$, $[r_1r_2]$, то

$$\frac{x_1y - xy_1}{[r_1r]} = \frac{xy_2 - x_2y}{[rr_2]} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{[r_1r_2]}.$$

Следовательно,

$$n_1 = \frac{[rr_2]}{[r_1r_2]}; \quad n_2 = \frac{[r_1r]}{[r_1r_2]}. \tag{2.10}$$

Таким образом, n_1 и n_2 равны отношениям площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами светила.

Заметим еще, что соотношения (2.4) представляют собой условие нахождения трех положений светила в плоскости, проходящей через Солнце. Чтобы получить это условие в обычной форме, достаточно исключить n_1 и n_2.

§ 3. Уравнения, выражающие геоцентрические расстояния через отношения площадей треугольников

Гелиоцентрические координаты светила выражаются через геоцентрические расстояния формулами (1.1), дающими

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \rho_1\lambda_1 - X_1, & x &= \rho\lambda - X, & x_2 &= \rho_2\lambda_2 - X_2, \\ y_1 &= \rho_1\mu_1 - Y_1, & y &= \rho\mu - Y, & y_2 &= \rho_2\mu_2 - Y_2, \\ z_1 &= \rho_1\nu_1 - Z_1, & z &= \rho\nu - Z, & z_2 &= \rho_2\nu_2 - Z_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Подставив эти выражения в основные соотношения (2.4), найденные в предыдущем параграфе, получим

$$\left.\begin{aligned} \rho_1n_1\lambda_1 - \rho\lambda + \rho_2n_2\lambda_2 &= n_1X_1 - X + n_2X_2, \\ \rho_1n_1\mu_1 - \rho\mu + \rho_2n_2\mu_2 &= n_1Y_1 - Y + n_2Y_2, \\ \rho_1n_1\nu_1 - \rho\nu + \rho_2n_2\nu_2 &= n_1Z_1 - Z + n_2Z_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Эти уравнения позволили бы сразу найти ρ_1, ρ, ρ_2, если бы n_1 и n_2 были известны. Раньше чем показать, как здесь можно