моментов наблюдений и интервалами времени между этими моментами. Эти соотношения содержат еще, как показывают формулы (2.7) и (2.8), радиус-вектор светила r для момента среднего наблюдения и его последовательные производные r', r'', ...

Величины n_1 и n_2 имеют простое геометрическое значение. В самом деле, первые два из соотношеиий (2.4) дают

$$n_1 = \frac{xy_2 - x_2y}{x_1y_2 - x_2y_1}; \quad n_2 = \frac{x_1y - xy_1}{x_1y_2 - x_2y_1}. \tag{2.9}$$

Выражения, стоящие здесь в числителях и знаменателях, представляют удвоенные площади проекции треугольников, заключенных между тремя радиусами-векторами r_1, r, r_2 на координатную плоскость xy. Поэтому если удвоенные площади этих треугольников обозначить через $[r_1r]$, $[rr_2]$, $[r_1r_2]$, то

$$\frac{x_1y - xy_1}{[r_1r]} = \frac{xy_2 - x_2y}{[rr_2]} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{[r_1r_2]}.$$

Следовательно,

$$n_1 = \frac{[rr_2]}{[r_1r_2]}; \quad n_2 = \frac{[r_1r]}{[r_1r_2]}. \tag{2.10}$$

Таким образом, n_1 и n_2 равны отношениям площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами светила.

Заметим еще, что соотношения (2.4) представляют собой условие нахождения трех положений светила в плоскости, проходящей через Солнце. Чтобы получить это условие в обычной форме, достаточно исключить n_1 и n_2.

§ 3. Уравнения, выражающие геоцентрические расстояния через отношения площадей треугольников

Гелиоцентрические координаты светила выражаются через геоцентрические расстояния формулами (1.1), дающими

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \rho_1\lambda_1 - X_1, & x &= \rho\lambda - X, & x_2 &= \rho_2\lambda_2 - X_2, \\ y_1 &= \rho_1\mu_1 - Y_1, & y &= \rho\mu - Y, & y_2 &= \rho_2\mu_2 - Y_2, \\ z_1 &= \rho_1\nu_1 - Z_1, & z &= \rho\nu - Z, & z_2 &= \rho_2\nu_2 - Z_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Подставив эти выражения в основные соотношения (2.4), найденные в предыдущем параграфе, получим

$$\left.\begin{aligned} \rho_1n_1\lambda_1 - \rho\lambda + \rho_2n_2\lambda_2 &= n_1X_1 - X + n_2X_2, \\ \rho_1n_1\mu_1 - \rho\mu + \rho_2n_2\mu_2 &= n_1Y_1 - Y + n_2Y_2, \\ \rho_1n_1\nu_1 - \rho\nu + \rho_2n_2\nu_2 &= n_1Z_1 - Z + n_2Z_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Эти уравнения позволили бы сразу найти ρ_1, ρ, ρ_2, если бы n_1 и n_2 были известны. Раньше чем показать, как здесь можно воспользоваться разложениями, даваемыми формулами (2.7) и (2.8), представим уравнения (3.2) в другом виде.

Решение уравнений (3.2) относительно ρ дает

$$D\rho = D',$$

если положить

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} X - n_1X_1 - n_2X_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y - n_1Y_1 - n_2Y_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ Z - n_1Z_1 - n_2Z_2 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}.$$

Введя следующие обозначения:

$$\lambda_{12} = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1; \quad \mu_{12} = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1; \quad \nu_{12} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1, \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{aligned} U &= X\lambda_{12} + Y\mu_{12} + Z\nu_{12}, \\ U_1 &= X_1\lambda_{12} + Y_1\mu_{12} + Z_1\nu_{12}, \\ U_2 &= X_2\lambda_{12} + Y_2\mu_{12} + Z_2\nu_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

будем иметь

$$D\rho = U - n_1U_1 - n_2U_2, \tag{3.5}$$

где

$$D = \lambda\lambda_{12} + \mu\mu_{12} + \nu\nu_{12}. \tag{3.6}$$

Когда ρ найдено, вычисление двух других геоцентрических расстояний целесообразно выполнить так. Пусть из величин (3.3) самой большой по абсолютному значению оказалась ν_{12}. В таком случае для нахождения ρ_1 следует взять два первые из уравнений (3.2). Исключив из них ρ_2 получим

$$\begin{aligned} n_1\nu_{12}\rho_1 = (\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)\rho - (\mu_2X - \lambda_2Y) + n_1(\mu_2X_1 - \lambda_2Y_1) + \\ + n_2(\mu_2X_2 - \lambda_2Y_2). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Когда ρ и ρ_1 уже известны, любое из уравнений (3.2) может служить для нахождения ρ_2. Для получения результата с наибольшей точностью, здесь также следует взять то уравнение, в котором коэффициент при ρ_2 имеет наибольшее абсолютное значение.

§ 4. Вычисление геоцентрических расстояний в первом приближении

Обратимся теперь к нахождению геоцентрического расстояния в момент среднего наблюдения.

Подстановка выражений (2.7) в равенство (3.5) дает

$$\rho = P - Qr^{-3}, \tag{4.1}$$

где

$$P = D^{-1}(U - n_1^0U_1 - n_0U_2); \quad Q = D^{-1}(c_1U_1 + c_2U_2). \tag{4.2}$$