воспользоваться разложениями, даваемыми формулами (2.7) и (2.8), представим уравнения (3.2) в другом виде.

Решение уравнений (3.2) относительно ρ дает

$$D\rho = D',$$

если положить

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} X - n_1 X_1 - n_2 X_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y - n_1 Y_1 - n_2 Y_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ Z - n_1 Z_1 - n_2 Z_2 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}.$$

Введя следующие обозначения:

$$\lambda_{12} = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1; \quad \mu_{12} = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1; \quad \nu_{12} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1, \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{aligned} U &= X\lambda_{12} + Y\mu_{12} + Z\nu_{12}, \\ U_1 &= X_1\lambda_{12} + Y_1\mu_{12} + Z_1\nu_{12}, \\ U_2 &= X_2\lambda_{12} + Y_2\mu_{12} + Z_2\nu_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

будем иметь

$$D\rho = U - n_1 U_1 - n_2 U_2, \tag{3.5}$$

где

$$D = \lambda\lambda_{12} + \mu\mu_{12} + \nu\nu_{12}. \tag{3.6}$$

Когда ρ найдено, вычисление двух других геоцентрических расстояний целесообразно выполнить так. Пусть из величин (3.3) самой большой по абсолютному значению оказалась ν_{12}. В таком случае для нахождения ρ_1 следует взять два первые из уравнений (3.2). Исключив из них ρ_2 получим

$$n_1\nu_{12}\rho_1 = (\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)\rho - (\mu_2 X - \lambda_2 Y) + n_1(\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1) + \\ + n_2(\mu_2 X_2 - \lambda_2 Y_2). \tag{3.7}$$

Когда ρ и ρ_1 уже известны, любое из уравнений (3.2) может служить для нахождения ρ_2. Для получения результата с наибольшей точностью, здесь также следует взять то уравнение, в котором коэффициент при ρ_2 имеет наибольшее абсолютное значение.

§ 4. Вычисление геоцентрических расстояний в первом приближении

Обратимся теперь к нахождению геоцентрического расстояния в момент среднего наблюдения.

Подстановка выражений (2.7) в равенство (3.5) дает

$$\rho = P - Qr^{-3}, \tag{4.1}$$

где

$$P = D^{-1}(U - n_1^0 U_1 - n_0 U_2); \quad Q = D^{-1}(c_1 U_1 + c_2 U_2). \tag{4.2}$$

Коэффициент P этого уравнения выражается через величины, полученные из наблюдений, а потому может быть вычислен совершенно точно. Коэффициент Q, помимо известных величин, содержит еще величины c_1 и c_2, даваемые разложениями (2.8).

Интервалы времени τ_1, τ_2, τ мы считаем малыми величинами первого порядка. Поэтому, ограничиваясь точностью до членов второго порядка включительно, будем иметь

$$c_1 = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1+n_1^0); \quad c_2 = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1+n_2^0), \tag{4.3}$$

и коэффициент Q будет известен.

В равенство

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

подставим значения (3.1); это даст

$$r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2, \tag{4.4}$$

где

$$C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z); \qquad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \tag{4.5}$$

что представляет точное уравнение, связывающее неизвестные ρ и r.

Таким образом, если в уравнении (4.1) ограничиться приближенными значениями (4.3), то система уравнений (4.1) и (4.4) позволит найти приближенные значения ρ и r. Эту систему, впервые полученную Лагранжем (1778), будем называть уравнениями Лагранжа.

После того как решение уравнений Лагранжа дало ρ и r, по формулам (2.7) можно найти n_1 и n_2, а затем при помощи уравнений (3.7) и (3.2) вычислить ρ_1 и ρ_2. Этим заканчивается нахождение геоцентрических расстояний в первом приближении.

Примечание. Чтобы получить первое приближение, мы взяли для c_1 и c_2 значения (4.3), имеющие, как показывают равенства (2.8), ошибку третьего порядка. Это сделано потому, что члены третьего и высших порядков в разложениях (2.8) содержат новые неизвестные r', r'', ...

Можно попытаться повысить точность уравнения (4.1), взяв в рядах (2.8) или, что то же самое, в рядах (2.6) еще члены четвертого порядка, не зависящие от производных r', r'', ...

Это дает вместо использованных нами формул

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}, \tag{4.6}$$

где c_1 и c_2 выражаются равенствами (4.3), такие:

$$n_1 = n_1^0 + \frac{c_1}{r^3}\left(1 + \frac{7\tau^2 - 3\tau_1^2}{60r^3}\right); \quad n_2 = n_2^0 + \frac{c_2}{r^3}\left(1 + \frac{7\tau^2 - 3\tau_2^2}{60r^3}\right). \tag{4.7}$$

Поскольку члены четвертого порядка здесь учитываются лишь частично, а членами третьего порядка мы вовсе пренебрегаем, целесообразно эти выражения упростить, пользуясь тем, что почти всегда промежутки времени между наблюдениями приблизительно равны, так что $\tau \approx 2\tau_1 \approx 2\tau_2$. Это дает

$$7\tau^2 - 3\tau_1^2 \approx 7\tau^2 - 3\tau_2^2 \approx \frac{25}{4}\tau^2,$$

откуда

$$1 + \frac{7\tau^2 - 3\tau_1^2}{60r^3} \approx 1 + \frac{5\tau^2}{48r^3} \approx \frac{r^3}{r^3 - \frac{5}{48}\tau^2}.$$

Таким образом, вместо формул (4.6) для первого приближения можно взять формулы Эберта [1906]:

$$n_1 = n_1^0 + c_1\left(r^3 - \frac{5}{48}\tau^2\right)^{-1}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2\left(r^3 - \frac{5}{48}\tau^2\right)^{-1}, \tag{4.8}$$

или формулы Андуайе [1923]:

$$n_1 = n_1^0 + c_1\left(r^3 - \frac{1}{6}\tau^2\right)^{-1}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2\left(r^3 - \frac{1}{6}\tau^2\right)^{-1}. \tag{4.9}$$

Использование этих формул вместо (4.6) лишь незначительно усложняет решение уравнений, дающих ρ и r.

Если планета движется по круговой орбите, то $r' = r'' = \ldots = 0$. В этом случае употребление только что указанных формул дает несомненный выигрыш в точности. Для орбиты с большим эксцентриситетом величины членов, пропорциональных производным

$$r' = \frac{e}{\sqrt{p}}\sin v; \quad r'' = \frac{e}{r^2}\cos v; \quad \cdots$$

могут быть гораздо более значительными, нежели тех, которые мы здесь учитываем. Для такой орбиты замена формул (4.6) формулами (4.7), не говоря уже о формулах Эберта и Андуайе, не даст более точных результатов.

§ 5. Влияние погрешностей в n_1 и n_2 на значения геоцентрических расстояний

Вычисление геоцентрических расстояний начинается, как мы видели, с решения системы уравнений

$$D\rho = U - n_1 U_1 - n_2 U_2, \tag{5.1}$$

$$r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2 \tag{5.2}$$

относительно ρ и r.

Коэффициенты этих уравнений выражаются формулами (3.4), (3.6) и (4.5) через данные наблюдений и координаты Солнца, а потому их значения от нас не зависят. Что же касается до n_1 и n_2, то вместо них приходится подставлять те или иные приближенные значения.

Предположим, что принятые значения n_1 и n_2 имеют ошибки порядка m относительно интервалов времени

$$\tau_1 = k(t_2 - t); \quad \tau_2 = k(t - t_1); \quad \tau = k(t_2 - t_1)$$

и посмотрим, каков будет порядок соответствующей ошибки в ρ.