между наблюдениями приблизительно равны, так что $\tau \approx 2\tau_1 \approx 2\tau_2$ Это дает

$$7\tau^2 - 3\tau_1^2 \approx 7\tau^2 - 3\tau_2^2 \approx \frac{25}{4}\tau^2,$$

откуда

$$1 + \frac{7\tau^2 - 3\tau_1^2}{60r^3} \approx 1 + \frac{5\tau^2}{48r^3} \approx \frac{r^3}{r^3 - \frac{5}{48}\tau^2}.$$

Таким образом, вместо формул (4.6) для первого приближения можно взять формулы Эберта [1906]:

$$n_1 = n_1^0 + c_1\left(r^3 - \frac{5}{48}\tau^2\right)^{-1}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2\left(r^3 - \frac{5}{48}\tau^2\right)^{-1}, \tag{4.8}$$

или формулы Андуайе [1923]:

$$n_1 = n_1^0 + c_1\left(r^3 - \frac{1}{6}\tau^2\right)^{-1}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2\left(r^3 - \frac{1}{6}\tau^2\right)^{-1}. \tag{4.9}$$

Использование этих формул вместо (4.6) лишь незначительно усложняет решение уравнений, дающих ρ и r.

Если планета движется по круговой орбите, то $r' = r'' = \ldots = 0$. В этом случае употребление только что указанных формул дает несомненный выигрыш в точности. Для орбиты с большим эксцентриситетом величины членов, пропорциональных производным

$$r' = \frac{e}{\sqrt{p}}\sin v; \quad r'' = \frac{e}{r^2}\cos v; \quad \cdots$$

могут быть гораздо более значительными, нежели тех, которые мы здесь учитываем. Для такой орбиты замена формул (4.6) формулами (4.7), не говоря уже о формулах Эберта и Андуайе, не даст более точных результатов.

§ 5. Влияние погрешностей в n_1 и n_2 на значения геоцентрических расстояний

Вычисление геоцентрических расстояний начинается, как мы видели, с решения системы уравнений

$$D\rho = U - n_1U_1 - n_2U_2, \tag{5.1}$$

$$r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2 \tag{5.2}$$

относительно ρ и r.

Коэффициенты этих уравнений выражаются формулами (3.4), (3.6) и (4.5) через данные наблюдений и координаты Солнца, а потому их значения от нас не зависят. Что же касается до n_1 и n_2, то вместо них приходится подставлять те или иные приближенные значения.

Предположим, что принятые значения n_1 и n_2 имеют ошибки порядка m относительно интервалов времени

$$\tau_1 = k(t_2 - t); \quad \tau_2 = k(t - t_1); \quad \tau = k(t_2 - t_1)$$

и посмотрим, каков будет порядок соответствующей ошибки в ρ.

Формула Тэйлора дает

$$\lambda_1=\lambda-\tau_2\lambda'+\frac{1}{2}\tau_2^2\lambda''-\ldots;\quad X_1=X-\tau_2X'+\frac{1}{2}\tau_2^2X''-\ldots,$$

$$\lambda_2=\lambda+\tau_1\lambda'+\frac{1}{2}\tau_1^2\lambda''+\ldots;\quad X_2=X+\tau_1X'+\frac{1}{2}\tau_1^2X''+\ldots$$

и аналогичные разложения для двух других направляющих косинусов и двух других координат.

Подставив эти разложения в формулы (3.3), получим

$$\lambda_{12}=\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1=\tau(\mu\nu'-\mu'\nu)-\frac{1}{2}(\tau_1^2-\tau_2^2)(\mu\nu''-\mu''\nu)+$$
$$+\frac{1}{6}(\tau_1^3+\tau_2^3)(\mu\nu'''-\mu'''\nu)-\frac{1}{2}\tau\tau_1\tau_2(\mu'\nu''-\mu''\nu')+\ldots$$

и аналогичные выражения для μ_{12} и ν_{12}.

После этого, пользуясь выражениями (3.4) и (3.6), будем иметь

$$D=-\frac{1}{2}\tau\tau_1\tau_2E+\text{члены четвертого порядка},\tag{5.3}$$

$$U=M\tau+N;\quad U_1=M\tau+N_1;\quad U_2=M\tau+N_2,\tag{5.4}$$

где положено

$$E=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda' & \lambda''\\ \mu & \mu' & \mu''\\ \nu & \nu' & \nu''\end{vmatrix},\quad M=\begin{vmatrix}X & \lambda' & \lambda''\\ Y & \mu' & \mu''\\ Z & \nu' & \nu''\end{vmatrix},$$

а через N, N_1 и N_2 обозначены величины, порядок которых не ниже второго.

Ограничимся общим случаем, когда определители E и M не равны нулю. Подстановка выражений (5.3) и (5.4) в равенство (5.1) дает

$$\rho=(1-n_1-n_2)\tau MD^{-1}+(N-n_1N_1-n_2N_2)D^{-1}.\tag{5.5}$$

Так как D есть величина третьего порядка малости, то коэффициент у $(1-n_1-n_2)$ здесь (—2)-го порядка, а коэффициенты у n_1 и n_2 порядка (—1)-го. Мы приходим, следовательно, к такому заключению:

Если для отношений n_1 и n_2 взять значения, имеющие ошибку порядка h, то ρ получится в общем случае с ошибкой порядка $h-2$.

Но если n_1 и n_2 имеют ошибку порядка h, а сумма n_1+n_2 имеет ошибку порядка $h+1$, то ошибка в ρ будет порядка $h-1$.

Уравнения (5.2), (3.7) и (3.2) показывают, что r, ρ_1 и ρ_2 найдутся с той же точностью, с какой известно ρ.

Рассмотрим теперь случай, когда промежутки времени между наблюдениями равны, т. е. когда

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2}\tau.$$

Формулы (2.7) и (2.8), дающие

$$1 - n_1 - n_2 = -\frac{1}{2}\tau_1\tau_2 r^{-3} - \frac{1}{2}\tau_1\tau_2(\tau_2 - \tau_1) r^{-4} r' + \ldots,$$

показывают, что в этом случае

$$1 - n_1 - n_2 = -\frac{1}{8}\tau^2 r^{-3} + (4) + (6) + \ldots, \tag{5.6}$$

где через (4), (6), ... обозначены члены четвертого, шестого, ... порядков. Легко видеть, что все члены нечетных порядков здесь действительно обращаются в нуль. В самом деле, при замене τ_1, τ_2 на $-\tau_2$, $-\tau_1$ выражения (2.5) переходят одно в другое; но при такой замене все члены нечетных порядков относительно τ_1 и τ_2 меняют знак.

Предположим теперь, что в случае равноотстоящих наблюдений для n_1 и n_2 взяты значения, имеющие ошибки порядка $2l+1$. В силу равенства (5.6) сумма $1-n_1-n_2$ будет известна с ошибкой порядка $2l+2$, вследствие чего ρ найдется с ошибкой порядка $2l$.

Отсюда видно, что при вычислении орбиты по трем наблюдениям весьма выгодно пользоваться равноотстоящими наблюдениями, так как ошибки в принятых значениях n_1 и n_2 в этом случае меньше влияют на геоцентрические расстояния. Но употребление равноотстоящих наблюдений выгодно и по другой причине: чем ближе к равенству величины τ_1 и τ_2, сумма которых τ постоянна, тем больше произведение $\tau_1\tau_2$, а следовательно, и абсолютное значение D, как это видно из (5.3); тем точнее, следовательно, вычисляется ρ.

Применим полученные результаты к рассмотренному в предыдущем параграфе первому приближению, основанному на формулах (4.3) или, что то же самое, (4.6). Так как ошибки этих формул третьего порядка малости, то отсюда следует, что *в общем случае первое приближение дает геоцентрические расстояния с ошибками первого порядка; если же взяты равноотстоящие наблюдения, то геоцентрические расстояния получаются с ошибками второго порядка.*