§ 6. Точные значения геоцентрических расстояний

После того как получены приближенные геоцентрические расстояния при помощи формул, указанных в § 3 и 4, их можно использовать для вычисления приближенной орбиты. Так поступают, когда надо возможно скорее дать эфемериду, или когда промежутки времени между наблюдениями очень малы. Но если должна быть вычислена орбита, которая совершенно точно удовлетворяет трем взятым наблюдениям, то геоцентрические расстояния, найденные в первом приближении, нужно уточнить.

Для перехода от приближенных значений геоцентрических расстояний к точным значениям применяется разработанный Гауссом метод итерации, основанный на следующих соображениях.

Мы видели (§ 3), что для каждой пары значений n_1 и n_2 уравнение

$$D\rho = U - n_1U_1 - n_2U_2 \tag{6.1}$$

дает возможность найти соответствующее значение ρ, после чего формулы (3.7) и (3.2) дадут ρ_1 и ρ_2. Но обратный переход — от уже известных ρ, ρ_1, ρ_2 к отношениям n_1, n_2 площадей треугольников — можно выполнить не только по формулам (3.1) и (2.9) (что являлось бы лишь контролем вычислений), но и совершенно иначе.

В самом деле, после того как при помощи известных ρ, ρ_1, ρ_2 по формулам (3.1) найдены соответствующие значения гелиоцентрических координат, мы можем вычислить (§ 6 гл. V) отношения площадей сектора и треугольника для каждой пары положений светила, т. е. величины

$$\eta = \frac{(r_1r_2)}{[r_1r_2]}; \quad \eta_1 = \frac{(rr_2)}{[rr_2]}; \quad \eta_2 = \frac{(r_1r)}{[r_1r]}. \tag{6.2}$$

С другой стороны, закон площадей дает отношения площадей секторов:

$$\frac{(rr_2)}{(r_1r_2)} = \frac{\tau_1}{\tau} = n_1^0; \quad \frac{(r_1r)}{(r_1r_2)} = \frac{\tau_2}{\tau} = n_2^0.$$

Поэтому для отношений площадей треугольников получаем такие значения:

$$\bar{n}_1 = \frac{[rr_2]}{[r_1r_2]} = n_1^0\frac{\eta}{\eta_1}; \quad \bar{n}_2 = \frac{[r_1r]}{[r_1r_2]} = n_2^0\frac{\eta}{\eta_2}. \tag{6.3}$$

Важно отметить, что при наличии в исходных значениях ρ, ρ_1, ρ_2 ошибок определенного порядка относительно малых величин τ, τ_1, τ_2, соответствующие ошибки в величинах (6.3) будут более высокого порядка *). На этом и основан итеративный процесс, предложенный Гауссом и заключающийся в следующем. Взяв те или иные приближенные значения для n_1 и n_2, находим при помощи уравнений (6.1), (3.7) и (3.2) геоцентрические расстояния; вычислив затем соответствующие им гелиоцентрические координаты светила, по формулам (6.2) и (6.3) получаем новые значения $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ для отношений n_1, n_2. Если эти новые значения не совпадают с исходными, то вычисление повторяется. Так как новые значения получаются каждый раз более близкими к истинным, нежели исходные, то в конце концов получим $\bar{n}_1 = n_1$, $\bar{n}_2 = n_2$.

Поскольку конечные значения $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ каждого приближения являются функциями $f_1(n_1, n_2)$, $f_2(n_1, n_2)$ начальных значений n_1, n_2 этого приближения, задача заключается в решении системы уравнений

$$n_1 = f_1(n_1, n_2), \qquad n_2 = f_2(n_1, n_2). \tag{6.4}$$

Метод Гаусса состоит в решении этой системы при помощи итерации. Но уравнения (6.4) можно решать и другими методами. На практике обычно бывает достаточно второго приближения по методу итерации и лишь изредка приходится делать третье. В тех же случаях, когда итеративный процесс сходится медленно, лучше после первых двух приближений пользоваться способом линейного интерполирования.

С практической точки зрения весьма существенно то, что вычисление геоцентрических расстояний в каждом приближении можно производить по одним и тем же формулам.

В самом деле, в первом приближении мы положили

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \qquad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}, \tag{6.5}$$

вследствие чего уравнение (6.1) приняло форму

$$\rho = P - Q r^{-3}, \tag{6.6}$$

где

$$P = D^{-1}(U - n_1 U_1 - n_2 U_2), \qquad Q = D^{-1}(c_1 U_1 + c_2 U_2).$$

Чтобы сохранить форму (6.6) во втором и следующих приближениях, вычисляемых с более точными значениями $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, представим эти последние в таком же виде, как (6.5), т. е.

---

*) Это обстоятельство, делающее предложенный Гауссом итеративный процесс сходящимся, не было им обосновано теоретически, а лишь подтверждено многочисленными примерами. Теоретическое обоснование было дано в работах П. Ш. Мениса [1947] и Г. М. Баженова [1949]. П. Ш. Менисом было показано, между прочим, что уменьшение ошибки при переходе от величин ρ, ρ_1, ρ_2 к величинам (6.3) тем больше, чем меньше эксцентриситет орбиты и чем ближе к оппозиции рассматриваемые положения светила.

положим

$$\bar{n}_1 = n_1^0 + \bar{c}_1 r^{-3}; \quad \bar{n}_2 = n_2^0 + \bar{c}_2 r^{-3},$$

где r имеет значение, найденное в предыдущем приближении Таким образом, P остается неизменным, а Q во втором и следующих приближениях будет вычисляться по формулам

$$Q = D^{-1}(\bar{c}_1 U_1 + \bar{c}_2 U_2),$$

$$\bar{c}_1 = r^3(\bar{n}_1 - n_1^0); \quad \bar{c}_2 = r^3(\bar{n}_2 - n_2^0).$$

В формулах (3.7) и (3.2), применяемых для вычисления ρ_1 и ρ_2, коэффициенты при n_1 и n_2 остаются, конечно, без изменения во всех приближениях.

§ 7. Формулы Гиббса для отношений площадей треугольников

Формулы (6.3), служащие для нахождения более точных значений n_1, n_2, во втором приближении могут быть заменены гораздо более простыми приближенными формулами, дающими вполне достаточную для этого приближения точность.

Такого рода формулы могут быть получены при помощи следующего приближенного соотношения, связывающего три значения функции со значениями ее второй производной для тех же значений аргумента.

Обозначим через X_1, X, X_2 значения функции $X(\theta)$ в точках $\theta = -\tau_2$, 0, $+\tau_1$, а через X_1'', X'', X_2'' значения ее вторых производных в тех же точках. Предположим, далее, что функция может быть представлена с достаточной точностью полиномом четвертой степени, так что

$$X(\theta) = A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2 + A_3\theta^3 + A_4\theta^4,$$

$$X''(\theta) = 2A_2 + 6A_3\theta + 12A_4\theta^2.$$

Из шести уравнений

$$\begin{aligned}
X_1 &= A_0 - A_1\tau_2 + A_2\tau_2^2 - A_3\tau_2^3 + A_4\tau_2^4,\\
X &= A_0,\\
X_2 &= A_0 + A_1\tau_1 + A_2\tau_1^2 + A_3\tau_1^3 + A_4\tau_1^4,\\
X_1'' &= \qquad\qquad\; + 2A_2 - 6A_3\tau_2 + 12A_4\tau_2^2,\\
X'' &= \qquad\qquad\; + 2A_2,\\
X_2'' &= \qquad\qquad\; + 2A_2 + 6A_3\tau_1 + 12A_4\tau_1^2.
\end{aligned}$$