положим

$$\bar{n}_1 = n_1^0 + \bar{c}_1 r^{-3}; \quad \bar{n}_2 = n_2^0 + \bar{c}_2 r^{-3},$$

где r имеет значение, найденное в предыдущем приближении Таким образом, P остается неизменным, а Q во втором и следующих приближениях будет вычисляться по формулам

$$Q = D^{-1}(\bar{c}_1 U_1 + \bar{c}_2 U_2),$$

$$\bar{c}_1 = r^3(\bar{n}_1 - n_1^0); \quad \bar{c}_2 = r^3(\bar{n}_2 - n_2^0).$$

В формулах (3.7) и (3.2), применяемых для вычисления ρ_1 и ρ_2, коэффициенты при n_1 и n_2 остаются, конечно, без изменения во всех приближениях.

§ 7. Формулы Гиббса для отношений площадей треугольников

Формулы (6.3), служащие для нахождения более точных значений n_1, n_2, во втором приближении могут быть заменены гораздо более простыми приближенными формулами, дающими вполне достаточную для этого приближения точность.

Такого рода формулы могут быть получены при помощи следующего приближенного соотношения, связывающего три значения функции со значениями ее второй производной для тех же значений аргумента.

Обозначим через X_1, X, X_2 значения функции $X(\theta)$ в точках $\theta = -\tau_2$, 0, $+\tau_1$, а через X_1'', X'', X_2'' значения ее вторых производных в тех же точках. Предположим, далее, что функция может быть представлена с достаточной точностью полиномом четвертой степени, так что

$$X(\theta) = A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2 + A_3\theta^3 + A_4\theta^4,$$

$$X''(\theta) = 2A_2 + 6A_3\theta + 12A_4\theta^2.$$

Из шести уравнений

$$\begin{aligned}
X_1 &= A_0 - A_1\tau_2 + A_2\tau_2^2 - A_3\tau_2^3 + A_4\tau_2^4,\\
X &= A_0,\\
X_2 &= A_0 + A_1\tau_1 + A_2\tau_1^2 + A_3\tau_1^3 + A_4\tau_1^4,\\
X_1'' &= \qquad\qquad + 2A_2 - 6A_3\tau_2 + 12A_4\tau_2^2,\\
X'' &= \qquad\qquad + 2A_2,\\
X_2'' &= \qquad\qquad + 2A_2 + 6A_3\tau_1 + 12A_4\tau_1^2.
\end{aligned}$$

мы можем исключить пять коэффициентов A_0, A_1, ..., A_4. Это дает

$$\begin{vmatrix} X_1 & 1 & -\tau_2 & \tau_2^2 & -\tau_2^3 & \tau_2^4 \\ X & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 & \tau_1^4 \\ X_1'' & 0 & 0 & 2 & -6\tau_2 & 12\tau_2^2 \\ X'' & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ X_2'' & 0 & 0 & 2 & 6\tau_1 & 12\tau_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если развернуть этот определитель по элементам первого столбца, то будем иметь

$$12X_1\tau_1 + X_1''\tau_1(\tau_1^2 - \tau_1\tau_2 - \tau_2^2) - 12X\tau - X''\tau(\tau_1^2 + 3\tau_1\tau_2 + \tau_2^2) + \\ + 12X_2\tau_2 + X_2''\tau_2(\tau_2^2 - \tau_1\tau_2 - \tau_1^2) = 0,$$

где, как обычно, $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

После очевидных упрощений, положив для краткости

$$B_1 = \frac{1}{12}(\tau\tau_2 - \tau_1^2); \quad B = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_2 + \tau^2); \quad B_2 = \frac{1}{12}(\tau\tau_1 - \tau_2^2), \tag{7.1}$$

окончательно получим искомое соотношение в следующем виде:

$$X_1\tau_1\left(1 - \frac{B_1X_1''}{X_1}\right) - X\tau\left(1 + \frac{BX''}{X}\right) + X_2\tau_2\left(1 - \frac{B_2X_2''}{X_2}\right) = 0. \tag{7.2}$$

Применим теперь соотношение (7.2) к координатам x, y, z планеты или кометы.

Так как эти координаты удовлетворяют уравнениям

$$x'' = -xr^{-3}, \quad y'' = -yr^{-3}, \quad z'' = -zr^{-3},$$

то формула (7.2) дает

$$x_1\tau_1(1 + B_1r_1^{-3}) - x\tau(1 - Br^{-3}) + x_2\tau_2(1 + B_2r_2^{-3}) = 0,$$
$$y_1\tau_1(1 + B_1r_1^{-3}) - y\tau(1 - Br^{-3}) + y_2\tau_2(1 + B_2r_2^{-3}) = 0,$$
$$z_1\tau_1(1 + B_1r_1^{-3}) - z\tau(1 - Br^{-3}) + z_2\tau_2(1 + B_2r_2^{-3}) = 0.$$

Сравнение этих приближенных равенств с соотношениями (2.4) показывает, что имеют место приближенные формулы

$$n_1 = n_1^0\frac{1 + B_1r_1^{-3}}{1 - Br^{-3}}, \quad n_2 = n_2^0\frac{1 + B_2r_2^{-3}}{1 - Br^{-3}}. \tag{7.3}$$

Для выяснения точности, даваемой выражениями (7.3), разложим их по степеням τ, τ_1, τ_2 и сравним с разложениями (2.6) точных значений n_1 и n_2. Легко видеть, что поправка, которую надо придать выражению (7.3) для n_1 для получения точного значения, равна

$$+\frac{\tau_1\tau_2(\tau_1+\tau)(\tau_2+\tau)(\tau_1-\tau_2)}{40\tau}\left(\frac{1}{9r^6}+\frac{4r'^2}{r^5}-\frac{r''}{r^4}\right)+(5), \quad (7.4)$$

где через (5) обозначена совокупность членов не ниже пятого порядка. Поправка выражения (7.3) для n_2 получается отсюда заменой τ_1 и τ_2 соответственно через $-\tau_2$ и $-\tau_1$.

Таким образом, выражения (7.3), данные Гиббсом [1888] и носящие название формул Гиббса, позволяют находить отношения n_1 и n_2 с ошибкой четвертого порядка в общем случае и с ошибкой пятого порядка в случае равных интервалов времени, когда $\tau_1=\tau_2$; но сумма n_1+n_2 получается по этим формулам во всех случаях с ошибкой пятого порядка.

Коэффициенты (7.1) формул Гиббса можно представить в форме

$$B=\frac{\tau^2}{12}(1+n_1^0n_2^0), \qquad B_1=\frac{\tau^2}{12}(n_2^0-n_1^0n_1^0), \qquad B_2=\frac{\tau^2}{12}(n_1^0-n_2^0n_2^0),$$

более удобной для вычислений, нежели (7.1).

§ 8. Решение уравнений Лагранжа

Чтобы закончить рассмотрение задачи о нахождении геоцентрических расстояний, нужно еще остановиться на вопросе о численном решении уравнений Лагранжа

$$\rho=P-Qr^{-3}, \quad r^2=\rho^2+2C\rho+R^2 \quad (8.1)$$

относительно ρ и r. Как мы видели (§ 6), эту систему приходится решать в каждом приближении, постепенно уточняя значение коэффициента Q.

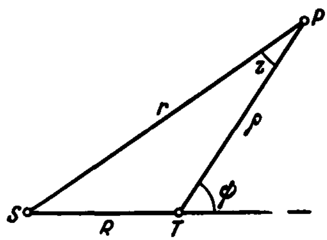

Рис. 16.

Отметим прежде всего некоторые свойства коэффициентов этих уравнений.

В треугольнике STP (рис. 16), образованном Солнцем S, местом наблюдения T и светилом P, обозначим через ψ угол между направлением на светило и продолжением радиуса-вектора Земли. Тогда второе из уравнений (8.1) можно написать так:

$$r^2=\rho^2+2\rho R\cos\psi+R^2,$$

откуда $C=R\cos\psi$.

Полагая

$$S^2=R^2-C^2=R^2\sin^2\psi,$$

получим

$$r^2=(\rho+C)^2+S^2. \quad (8.2)$$