надо придать выражению (7.3) для n_1 для получения точного значения, равна

$$+\frac{\tau_1\tau_2(\tau_1+\tau)(\tau_2+\tau)(\tau_1-\tau_2)}{40\tau}\left(\frac{1}{9r^6}+\frac{4r'^2}{r^5}-\frac{r''}{r^4}\right)+(5), \quad (7.4)$$

где через (5) обозначена совокупность членов не ниже пятого порядка. Поправка выражения (7.3) для n_2 получается отсюда заменой τ_1 и τ_2 соответственно через $-\tau_2$ и $-\tau_1$.

Таким образом, выражения (7.3), данные Гиббсом [1888] и носящие название формул Гиббса, позволяют находить отношения n_1 и n_2 с ошибкой четвертого порядка в общем случае и с ошибкой пятого порядка в случае равных интервалов времени, когда $\tau_1=\tau_2$; но сумма n_1+n_2 получается по этим формулам во всех случаях с ошибкой пятого порядка.

Коэффициенты (7.1) формул Гиббса можно представить в форме

$$B=\frac{\tau^2}{12}(1+n_1^0n_2^0), \quad B_1=\frac{\tau^2}{12}(n_2^0-n_1^0n_1^0), \quad B_2=\frac{\tau^2}{12}(n_1^0-n_2^0n_2^0),$$

более удобной для вычислений, нежели (7.1).

§ 8. Решение уравнений Лагранжа

Чтобы закончить рассмотрение задачи о нахождении геоцентрических расстояний, нужно еще остановиться на вопросе о численном решении уравнений Лагранжа

$$\rho=P-Qr^{-3}, \quad r^2=\rho^2+2C\rho+R^2 \quad (8.1)$$

относительно ρ и r. Как мы видели (§ 6), эту систему приходится решать в каждом приближении, постепенно уточняя значение коэффициента Q.

Отметим прежде всего некоторые свойства коэффициентов этих уравнений.

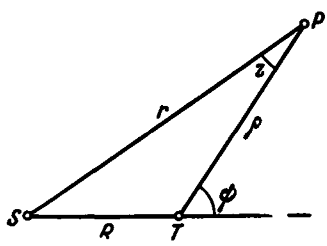

Рис. 16.

В треугольнике STP (рис. 16), образованном Солнцем S, местом наблюдения T и светилом P, обозначим через ψ угол между направлением на светило и продолжением радиуса-вектора Земли. Тогда второе из уравнений (8.1) можно написать так:

$$r^2=\rho^2+2\rho R\cos\psi+R^2,$$

откуда $C=R\cos\psi$.

Полагая

$$S^2=R^2-C^2=R^2\sin^2\psi,$$

получим

$$r^2=(\rho+C)^2+S^2. \quad (8.2)$$

С другой стороны, легко видеть, что значения

$$\rho = 0, \quad r = R \tag{8.3}$$

должны почти точно удовлетворять уравнениям (8.1), вследствие чего должно иметь место приближенное равенство

$$Q = PR^3. \tag{8.4}$$

В самом деле, при выводе уравнений (8.1) мы исходили только из двух предположений: 1) светило движется вокруг Солнца по законам Кеплера; 2) это светило в моменты рассматриваемых наблюдений находилось на тех трех прямых, которые фиксируются наблюденными координатами светила. Так как место наблюдения находилось в моменты наблюдений как раз на этих прямых, и так как его перемещение относительно Солнца происходит приблизительно по законам Кеплера, то отсюда ясно, что значения (8.3) должны почти точно удовлетворять уравнениям (8.1).

Исключение радиуса-вектора r из уравнений (8.1) дает

$$\rho = P - Q(\rho^2 + 2\rho R\cos\psi + R^2)^{-3/2}. \tag{8.5}$$

Пользуясь соотношением (8.4) и полагая

$$x = \rho R^{-1}, \quad p = RP^{-1},$$

легко привести это уравнение к виду

$$px = 1 - (x^2 + 2x\cos\psi + 1)^{-3/2}. \tag{8.6}$$

Так как уравнение (8.6) содержит только два параметра, то приближенное значение x может быть удобно найдено при помощи таблицы с двумя входами. Таблица X дает значения p по аргументам x и $\cos\psi$. Она позволяет легко находить значения x для заданных значений p и $\cos\psi$.

Полученное при помощи таблицы X приближенное значение x, а следовательно, и $\rho = xR$, позволяет вычислить соответствующий корень уравнения (8.5) со всей нужной точностью. Для этого можно применить метод Ньютона. Написав уравнение (8.5) в форме

$$f(\rho) \equiv \rho - P + Qr^{-3} = 0,$$

получим

$$f'(\rho) = 1 - 3Q(\rho + C)r^{-5}.$$

Это позволяет удобно переходить от приближенного значения ρ' к более точному ρ'' при помощи формулы

$$\rho'' = \rho' - \frac{f(\rho')}{f'(\rho')}.$$

Для перехода от значения r^2, даваемого формулой (8.2), к r^{-3} можно пользоваться таблицей XI.

Метод итерации, примененный непосредственно к уравнениям (8.1), также весьма часто быстро приводит к цели.

Пример. Требуется решить систему

$$\rho = 1{,}9328 - 1{,}9653 r^{-3},$$
$$r^2 = (\rho + 0{,}966552)^2 + 0{,}098758.$$

Так как здесь

$$R = 1{,}016, \quad p = 0{,}526, \quad \cos\psi = 0{,}95,$$

то из таблицы X находим, что $x = 1{,}80$, а потому для первого приближения имеем $\rho' = 1{,}83$.

Вычисление по методу Ньютона имеет такой вид:

ρ	1,83	1,846 1	r^{-5}	0,005 666
$\rho + C$	2,796 552	2,812 652	$3Q(\rho' + C)$	16,488
r^2	7,919 46	8,009 767	$f'(\rho')$	0,906 6
r^{-3}	0,044 870	0,044 113	$\rho'' - \rho'$	0,016 1
$f(\rho)$	—0,014 6	0,000 0		

Вычисление по методу итерации может быть выполнено следующим образом:

ρ	1,83	1,844 6	1,846 1
$\rho + C$	2,796 552	2,811 152	2,812 652
r^2	7,919 46	8,006 33	8,009 769
r^{-3}	0,044 87	0,044 14	0,044 113
ρ	1,844 6	1,846 1	1,846 1

Таким образом, окончательно имеем $\rho = 1{,}8461$.

Примечание I. Таблица X дает практически полное решение задачи о числе положительных значений ρ и r, удовлетворяющих уравнениям Лагранжа (8.1). Она показывает, что в некоторых случаях эта система уравнений в интересующей нас области может иметь два решения, вследствие чего будут существовать две различные орбиты, одинаково хорошо удовлетворяющие трем рассматриваемым наблюдениям.

Исследование числа решений системы (8.1), легко приводящееся к нахождению числа положительных корней одного алгебраического уравнения, может быть выполнено обычными методами, но получающиеся критерии имеют несколько громоздкий вид.

Примечание II. Гаусс указал способ приведения системы (8.1) к одному уравнению, особенно удобный при логарифмическом вычислении.

Обозначим через z угол треугольника STP (рис. 16) при вершине P. Так как

$$\frac{\rho}{\sin(\psi - z)} = \frac{r}{\sin\psi} = \frac{R}{\sin z},$$

то

$$\rho = R\frac{\sin(\psi - z)}{\sin z}, \quad r = R\frac{\sin\psi}{\sin z}. \tag{8.7}$$

Подстановка этих выражений в первое из уравнений (8.1) дает для нахождения угла z такое соотношение:

$$-R\sin\psi\cos z+(R\cos\psi+P)\sin z=Q\,(R\sin\psi)^{-3}\sin^4 z. \qquad (8.8)$$

Положим

$$\mu\sin q=R\sin\psi;\quad \mu\cos q=R\cos\psi+P,$$

$$m=Q\mu^{-1}(R\sin\psi)^{-3},$$

причем условимся выбрать квадрант q так, чтобы μ имело такой же знак, как и Q, иначе говоря, чтобы было $m>0$.

Уравнение (8.8), принимающее вид

$$\sin(z-q)=m\sin^4 z, \qquad (8.9)$$

и есть уравнение Гаусса.

Так как $\sin(z-q)$ и $\sin(\psi-z)$ должны быть положительны, то для нас интересны только те корни уравнения Гаусса, которые находятся в интервале

$$q<z<\psi.$$

Для малых планет, открываемых всегда вблизи оппозиции, z мало отличается от q, поскольку угол z невелик, в силу чего правая часть уравнения (8.9) очень мала.

Вследствие этого, взяв для первого приближения $z'=q$, из уравнения

$$\sin(z''-q)=m\sin^4 z'$$

получим более точное значение z''. Повторение этого приема довольно быстро дает значение z, удовлетворяющее уравнению Гаусса с нужной точностью.

Существуют различные приемы и вспомогательные таблицы, облегчающие решение уравнения Гаусса. Таблицы Т. Банахевича [1916], включенные в сборник таблиц Баушингера и Штракке [1934], дают z с точностью до шестого знака.

§ 9. Сопоставление формул для вычисления гелиоцентрических координат по методу Лагранжа—Гаусса

Нахождение орбиты по трем наблюдениям распадается, как мы видели (§ 1), на две части: нахождение геоцентрических расстояний, дающих возможность вычислить гелиоцентрические координаты светила, и вычисление элементов орбиты по гелиоцентрическим координатам.

Вторая часть задачи была нами полностью изучена в гл. V. Решение первой части задачи, изложенное в предыдущих параграфах, может быть названо методом Лагранжа — Гаусса, поскольку основная идея и осуществление первого приближения были даны Лагранжем, а разработка способа получения точных значений гелиоцентрических координат была выполнена Гауссом.

В этом параграфе мы соберем вместе все формулы, обычно употребляемые при пользовании этим методом.

Исходными данными являются: моменты трех выбранных наблюдений t_1, t, t_2 $(t_1<t<t_2)$, выраженные в средних солнечных