Подстановка этих выражений в первое из уравнений (8.1) дает для нахождения угла z такое соотношение:

$$-R\sin\psi\cos z+(R\cos\psi+P)\sin z=Q\,(R\sin\psi)^{-3}\sin^4 z. \qquad (8.8)$$

Положим

$$\mu\sin q=R\sin\psi;\quad \mu\cos q=R\cos\psi+P,$$

$$m=Q\mu^{-1}(R\sin\psi)^{-3},$$

причем условимся выбрать квадрант q так, чтобы μ имело такой же знак, как и Q, иначе говоря, чтобы было $m>0$.

Уравнение (8.8), принимающее вид

$$\sin(z-q)=m\sin^4 z, \qquad (8.9)$$

и есть уравнение Гаусса.

Так как $\sin(z-q)$ и $\sin(\psi-z)$ должны быть положительны, то для нас интересны только те корни уравнения Гаусса, которые находятся в интервале

$$q<z<\psi.$$

Для малых планет, открываемых всегда вблизи оппозиции, z мало отличается от q, поскольку угол z невелик, в силу чего правая часть уравнения (8.9) очень мала.

Вследствие этого, взяв для первого приближения $z'=q$, из уравнения

$$\sin(z''-q)=m\sin^4 z'$$

получим более точное значение z''. Повторение этого приема довольно быстро дает значение z, удовлетворяющее уравнению Гаусса с нужной точностью.

Существуют различные приемы и вспомогательные таблицы, облегчающие решение уравнения Гаусса. Таблицы Т. Банахевича [1916], включенные в сборник таблиц Баушингера и Штракке [1934], дают z с точностью до шестого знака.

§ 9. Сопоставление формул для вычисления гелиоцентрических координат по методу Лагранжа—Гаусса

Нахождение орбиты по трем наблюдениям распадается, как мы видели (§ 1), на две части: нахождение геоцентрических расстояний, дающих возможность вычислить гелиоцентрические координаты светила, и вычисление элементов орбиты по гелиоцентрическим координатам.

Вторая часть задачи была нами полностью изучена в гл. V. Решение первой части задачи, изложенное в предыдущих параграфах, может быть названо методом Лагранжа — Гаусса, поскольку основная идея и осуществление первого приближения были даны Лагранжем, а разработка способа получения точных значений гелиоцентрических координат была выполнена Гауссом.

В этом параграфе мы соберем вместе все формулы, обычно употребляемые при пользовании этим методом.

Исходными данными являются: моменты трех выбранных наблюдений t_1, t, t_2 ($t_1<t<t_2$), выраженные в средних солнечных

сутках; наблюденные координаты светила (α_1, δ_1), (α, δ), (α_2, δ_2); координаты Солнца в моменты наблюдений (X_1, Y_1, Z_1), (X, Y, Z), (X_2, Y_2, Z_2). Координаты светила и координаты Солнца должны быть выражены в одной и той же системе, т. е. должны быть одновременно либо геоцентрическими, либо топоцентрическими, и должны быть отнесены к одному и тому же экватору и равноденствию.

Ради полной определенности мы будем предполагать, что наблюдения исправлены за аберрацию неподвижных звезд, но не исправлены за планетную аберрацию.

Сферические координаты светила дают направляющие косинусы:

$$\lambda_1 = \cos\delta_1 \cos\alpha_1, \quad \mu_1 = \cos\delta_1 \sin\alpha_1, \quad \nu_1 = \sin\delta_1$$

. . . .

Контроль:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \ldots$$

Примечание I. Вычисление орбиты ведется, как правило, с шестью знаками. В случае наблюдений исключительно большой точности (например, при вычислении по нормальным местам (см. гл. XI)), может быть целесообразно частичное применение семизначного вычисления. Если вычисляется предварительная орбита по мало точным наблюдениям (например, по данным с точностью до 1″), то можно ограничиться пятью знаками (самое большее — вычислить с шестью знаками основные постоянные, а все остальное — вычислять с пятью).

Примечание II. Так как всякая ошибка в исходных данных сведет на нет всю последующую работу, то не следует жалеть времени на самую тщательную проверку всех этих величин. Для контроля координат Солнца можно образовать величины $X_1^2+Y_1^2+Z_1^2$, . . . и сравнить их с квадратами радиусов-векторов Земли, найденными из эфемерид. При этом берутся, конечно, геоцентрические координаты Солнца.

Вычисление постоянных

$$\lambda_{12} = \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1; \quad \mu_{12} = \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1; \quad \nu_{12} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1,$$

$$D = \lambda\lambda_{12} + \mu\mu_{12} + \nu\nu_{12}; \qquad U = X\lambda_{12} + Y\mu_{12} + Z\nu_{12},$$

$$U_1 = X_1\lambda_{12} + Y_1\mu_{12} + Z_1\nu_{12}; \quad U_2 = X_2\lambda_{12} + Y_2\mu_{12} + Z_2\nu_{12}.$$

Контроль:

$$L = \lambda_1 + \lambda + \lambda_2 + X_1 + X + X_2,$$

$$M = \mu_1 + \mu + \mu_2 + Y_1 + Y + Y_2,$$

$$N = \nu_1 + \nu + \nu_2 + Z_1 + Z + Z_2,$$

$$L\lambda_{12} + M\mu_{12} + N\nu_{12} = D + U_1 + U + U_2.$$

Далее находим:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2; \quad C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z),$$

$$S^2 = R^2 - C^2.$$

Первое приближение:

$$\tau_1 = k(t_2 - t), \quad \tau_2 = k(t - t_1), \quad \tau = k(t_2 - t_1),$$
$$k = 0{,}017202099;$$
$$n_1^0 = \tau_1/\tau; \qquad n_2^0 = \tau_2/\tau,$$
$$c_1 = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + n_1^0); \qquad c_2 = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1 + n_2^0).$$

Контроль:

$$\frac{1}{3}(c_1 + c_2) = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2.$$

Далее находим:

$$DP = U - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2; \quad DQ = c_1 U_1 + c_2 U_2, \tag{A}$$

и составляем основную систему

$$\rho = P - Qr^{-3}; \quad r^2 = (\rho + C)^2 + S^2. \tag{B}$$

Относительно решения этой системы см. § 8.

Примечание. Если вычисление ведется с логарифмами, то можно перейти к уравнению Гаусса. Получив из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \mu \sin q &= S, \\ \mu \cos q &= C + P, \end{aligned}\right\} \qquad (S = R \sin\psi > 0)$$

μ и q (для μ берем знак, одинаковый со знаком Q), находим

$$m = Q\mu^{-1}S^{-3} \quad (m > 0).$$

Решив затем уравнение Гаусса

$$\sin(z - q) = m \sin^4 z,$$

вычисляем ρ и r:

$$\sin\psi = \frac{S}{R}; \quad \rho = R\frac{\sin(\psi - z)}{\sin z}; \quad r = R\frac{\sin\psi}{\sin z}.$$

После того как тем или иным способом вычислены ρ и r, переходим к нахождению геоцентрических расстояний и радиусов-векторов для моментов двух крайних наблюдений.

Прежде всего находим

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}.$$

Затем вычисляем ρ_1 по одному из уравнений

$$\left.\begin{aligned} n_1\lambda_{12}\rho_1 &= (\mu\nu_2 - \nu\mu_2)\rho - (\nu_2 Y - \mu_2 Z) + \\ &\quad + n_1(\nu_2 Y_1 - \mu_2 Z_1) + n_2(\nu_2 Y_2 - \mu_2 Z_2), \\ n_1\mu_{12}\rho_1 &= (\nu\lambda_2 - \lambda\nu_2)\rho - (\lambda_2 Z - \nu_2 X) + \\ &\quad + n_1(\lambda_2 Z_1 - \nu_2 X_1) + n_2(\lambda_2 Z_2 - \nu_2 X_2), \\ n_1\nu_{12}\rho_1 &= (\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)\rho - (\mu_2 X - \lambda_2 Y) + \\ &\quad + n_1(\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1) + n_2(\mu_2 X_2 - \lambda_2 Y_2). \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

Выбираем то уравнение, в котором коэффициент при ρ_1 наибольший.

Точно так же для нахождения ρ_2 берем то из уравнений

$$\left.\begin{aligned} n_2\lambda_2\rho_2 &= \lambda\rho - n_1\lambda_1\rho_1 - X + n_1X_1 + n_2X_2,\\ n_2\mu_2\rho_2 &= \mu\rho - n_1\mu_1\rho_1 - Y + n_1Y_1 + n_2Y_2,\\ n_2\nu_2\rho_2 &= \nu\rho - n_1\nu_1\rho_1 - Z + n_1Z_1 + n_2Z_2,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(D)}$$

в котором коэффициент при ρ_2 наибольший.

Наконец, переходим к вычислению гелиоцентрических координат, для чего служат формулы

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1; & x &= \lambda\rho - X; & x_2 &= \lambda_2\rho_2 - X_2,\\ y_1 &= \mu_1\rho_1 - Y_1; & y &= \mu\rho - Y; & y_2 &= \mu_2\rho_2 - Y_2,\\ z_1 &= \nu_1\rho_1 - Z_1; & z &= \nu\rho - Z; & z_2 &= \nu_2\rho_2 - Z_2,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(E)}$$

и радиусов-векторов светила:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad r^2 = \ldots, \quad r_2^2 = \ldots$$

Контроль: полученная величина r^2 должна совпадать с найденной раньше. Кроме того, должны выполняться соотношения

$$x = n_1x_1 + n_2x_2, \quad y = n_1y_1 + n_2y_2, \quad z = n_1z_1 + n_2z_2.$$

Первое приближение заканчиваем учетом планетной аберрации: полученные нами координаты светила (x_1, y_1, z_1), (x, y, z), (x_2, y_2, z_2) относятся соответственно к моментам

$$t_1 - L\rho_1, \quad t - L\rho, \quad t_2 - L\rho_2,$$

где

$$L = 0^d{,}0057756; \qquad \lg L = 7{,}761597_{-10}.$$

Для малых планет очень часто можно ограничиться той точностью, которую дает первое приближение, и перейти сразу к нахождению элементов.

Второе и следующие приближения

Второе приближение лучше всего начать с вычисления более точных значений n_1 и n_2 по формулам Гиббса

$$n_1 = n_1^0\frac{1 + B_1r_1^{-3}}{1 - Br^{-3}}; \qquad n_2 = n_2^0\frac{1 + B_2r_2^{-3}}{1 - Br^{-3}},$$

в которых

$$B = \frac{\tau^2}{12}(1 + n_1^0n_2^0); \quad B_1 = \frac{\tau^2}{12}(n_2^0 - n_1^0n_1^0); \quad B_2 = \frac{\tau^2}{12}(n_1^0 - n_2^0n_2^0).$$

Не следует забывать, что τ, τ_1, τ_2, n_1^0, n_2^0 должны быть перевычислены с моментами наблюдений, исправленными за планетную аберрацию.

В третьем и дальнейших приближениях вместо формул Гиббса следует взять точные формулы:

$$n_1 = n_1^0 \eta/\eta_1; \quad n_2 = n_2^0 \eta/\eta_2.$$

Вычисление отношений площадей секторов и треугольников η, η_1, η_2 выполняется по формулам, указанным в § 7 гл. V.

Точными формулами можно пользоваться и во втором приближении в более трудных случаях, например, для кометы вблизи перигелия или в случае весьма значительных промежутков времени.

После того как тем или иным способом получены новые значения n_1 и n_2 (обозначения для них сохраняем прежние), вычисляем соответствующие им новые значения c_1 и c_2. Для этого служат формулы

$$c_1 = (n_1 - n_1^0)\, r^3; \quad c_2 = (n_2 - n_2^0)\, r^3,$$

где для n_1^0, n_2^0 берутся значения, исправленные за планетную аберрацию, а для r — значение, полученное в последнем приближении.

Затем при помощи соотношений (А) и (В) находим новые значения ρ и r. Подставив новые значения n_1, n_2 и ρ в те из уравнений (С) и (D), которые употреблялись в первом приближении, получим новые значения ρ_1 и ρ_2.

После этого уравнения (Е) дадут новые значения гелиоцентрических координат.

Если новые значения ρ, ρ_1, ρ_2 отличаются больше чем на 0,001 от тех, которые были употреблены для исправления моментов наблюдений за планетную аберрацию, то соответствующие поправки иногда бывает нужно перевычислить.

Последовательные приближения надо продолжать до тех пор, пока новые значения n_1 и n_2 не будут совпадать, в пределах точности вычисления, с полученными в предыдущем приближении.

Когда получены окончательные значения n_1, n_2, а следовательно, и гелиоцентрических координат, переходим к вычислению элементов орбиты. Для этого употребляются значения моментов и координат, полученные для двух крайних положений светила

$$t_1(x_1,\ y_1,\ z_1), \quad t_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

в последнем приближении. Сводка применяемых здесь формул уже была дана (§ 9 гл. V).

Представление наблюдений

Наиболее полным контролем полученной орбиты является представление исходных наблюдений при помощи найденных элементов. Практически достаточным является контроль, заключающийся в представлении среднего наблюдения, непосредственно не участвовавшего в определении элементов. Вычисленные координаты светила должны совпадать с исходными данными в пределах точности вычисления.

Представление исходных наблюдений позволяет судить только о правильности вычислений, но не о качестве полученной орбиты. Пригодность найденной орбиты может быть оценена лишь после представления ею других наблюдений. Дурное представление этих последних может иногда с определенностью указать на наличие ошибок в исходных наблюдениях и на необходимость повторения вычисления орбиты с другими данными.

Чтобы вычислить координаты, соответствующие наблюденному моменту t, пользуемся формулами

$$t^* = t - L\rho; \quad L = 0^d{,}0057756,$$
$$M = M_0 + n(t^* - t_0),$$
$$E - e^\circ \sin E = M,$$
$$\rho\cos\delta\cos\alpha = A_x(\cos E - e) + B_x \sin E + X,$$
$$\rho\cos\delta\sin\alpha = A_y(\cos E - e) + B_y \sin E + Y,$$
$$\rho\sin\delta = A_z(\cos E - e) + B_z \sin E + Z.$$

Координаты Солнца берутся для момента t. Аберрационное время $L\rho$ получается путем интерполирования или экстраполирования из значений, имеющихся для трех исходных наблюдений. После вычисления ρ правильность принятой величины $L\rho$ проверяется и, в случае надобности, вычисление повторяется. Сравниваемое наблюдение исправляется за параллакс.

В том случае, когда вычисления ведутся при помощи логарифмов и применен способ нахождения элементов (§ 4 гл. V), дающий в первую очередь экваторнальные элементы Ω', i', ω' представление наблюдений можно начать с вычисления постоянных Гаусса:

$$\begin{cases} \sin a \sin A' = \cos\Omega', \\ \sin a \cos A' = -\cos i' \sin\Omega', \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin b \sin B' = \sin\Omega', \\ \sin b \cos B' = \cos i' \cos\Omega'. \end{cases}$$

После этого, обозначая через $t^* = t - L\rho$ момент наблюдения, исправленный за аберрационное время, для нахождения геоцентрических координат будем иметь формулы

$$M = M_0 + n(t^* - t_0),$$
$$E - e \sin E = M,$$
$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E,$$
$$r \cos v = a(\cos E - e),$$
$$\rho \cos \delta \cos \alpha = r \sin a \sin (A' + \omega' + v) + X,$$
$$\rho \cos \delta \sin \alpha = r \sin b \sin (B' + \omega' + v) + Y,$$
$$\rho \sin \delta = r \sin i' \sin (\omega' + v) + Z.$$

Координаты Солнца должны быть взяты для неисправленного момента t.

§ 10. Пример вычисления орбиты малой планеты

Даны следующие топоцентрические положения планеты 1931 LB, полученные в Симеизской обсерватории Г. Н. Неуйминым:

1931		Всем. вр.	α (1931,0)	δ (1931,0)
Июнь	6	$21^h13^m,6$	$17^h04^m59^s,13$	$-13°39'13'',2$
»	21	21 25,3	16 52 16,49	−14 16 16,9
Июль	7	20 33,9	16 41 35,77	−15 11 40,0

Вычисление направляющих косинусов и некоторых вспомогательных величин располагаем следующим образом:

t	$6^d,884\,45$	$21^d,892\,57$	$37^d,856\,88$
α	256°,246 38	253°,068 71	250°,399 04
δ	−13,653 67	−14,271 36	−15,194 44
$\cos\alpha$	−0,237 747	−0,291 225	−0,335 467
$\sin\alpha$	−0,971 327	−0,956 655	−0,942 052
$\cos\delta$	+0,971 740	+0,969 139	+0,965 042
λ	−0,231 028	−0,282 238	−0,323 740
μ	−0,943 877	−0,927 132	−0,909 120
ν	−0,236 052	−0,246 515	−0,262 096
X	+0,259 587	+0,008 504	−0,258 673
Y	+0,900 143	+0,932 409	+0,902 079
Z	+0,390 383	+0,404 379	+0,391 223
$\lambda^2+\mu^2+\nu^2$	0,999 998	1,000 002	1,000 001

C	+0,966 552	L	−0,827 588
R^2	1,032 981	M	−0,045 498
S^2	0,098 758	N	+0,441 322

Координаты Солнца вписываем сюда уже исправленными за параллакс, т. е. топоцентрические.