иметь формулы

$$M = M_0 + n(t^* - t_0),$$
$$E - e \sin E = M,$$
$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E,$$
$$r \cos v = a(\cos E - e),$$
$$\rho \cos \delta \cos \alpha = r \sin a \sin (A' + \omega' + v) + X,$$
$$\rho \cos \delta \sin \alpha = r \sin b \sin (B' + \omega' + v) + Y,$$
$$\rho \sin \delta = r \sin i' \sin (\omega' + v) + Z.$$

Координаты Солнца должны быть взяты для неисправленного момента t.

§ 10. Пример вычисления орбиты малой планеты

Даны следующие топоцентрические положения планеты 1931 LB, полученные в Симеизской обсерватории Г. Н. Неуйминым:

1931		Всем. вр.	α (1931,0)	δ (1931,0)
Июнь	6	$21^h13^m,6$	$17^h04^m59^s,13$	$-13°39'13'',2$
»	21	21 25,3	16 52 16,49	—14 16 16,9
Июль	7	20 33,9	16 41 35,77	—15 11 40,0

Вычисление направляющих косинусов и некоторых вспомогательных величин располагаем следующим образом:

t	$6^d,884\,45$	$21^d,892\,57$		$37^d,856\,88$	
α	$256°,246\,38$	$253°,068\,71$		$250°,399\,04$	
δ	—13,653 67	—14,271 36		—15,194 44	
$\cos\alpha$	—0,237 747	—0,291 225		—0,335 467	
$\sin\alpha$	—0,971 327	—0,956 655		—0,942 052	
$\cos\delta$	+0,971 740	+0,969 139		+0,965 042	
λ	—0,231 028	—0,282 238		—0,323 740	
μ	—0,943 877	—0,927 132		—0,909 120	
ν	—0,236 052	—0,246 515		—0,262 096	
X	+0,259 587	+0,008 504		—0,258 673	
Y	+0,900 143	+0,932 409		+0,902 079	
Z	+0,390 383	+0,404 379		+0,391 223	
$\lambda^2+\mu^2+\nu^2$	0,999 998	1,000 002		1,000 001	
	C	+0,966 552	L	—0,827 588	
	R^2	1,032 981	M	—0,045 498	
	S^2	0,098 758	N	+0,441 322	

Координаты Солнца вписываем сюда уже исправленными за параллакс, т. е. топоцентрические.

Вычисление постоянных

λ_{12}	$+0{,}032\,7868$	D	$-0{,}000\,4137$
μ_{12}	$+0{,}015\,8680$	U	$-0{,}023\,5595$
ν_{12}	$-0{,}095\,5386$	U_1	$-0{,}014\,5021$
		U_2	$-0{,}031\,5438$
$L\lambda_{12}+\ldots$	$-0{,}070\,0192$	Сумма	$-0{,}070\,0191$

$$\begin{aligned}
-0{,}095\,5386 n_1\rho_1 &= -0{,}043\,5615\rho && -0{,}294\,1269 + \\
& && +0{,}055\,4166 n_1 + \\
& && +0{,}527\,2039 n_2 \\
-0{,}262\,096\, n_2\rho_2 &= -0{,}246\,515\rho && -0{,}404\,379 + \\
&\quad +0{,}236\,052 n_1\rho_1 && +0{,}390\,383 n_1 + \\
& && +0{,}391\,223 n_2
\end{aligned}$$

Первое приближение

t_2-t	15,964 31	τ_1	0,274 6197	c_1	0,017 9071
$t-t_1$	15,008 12	τ_2	0,258 1712	c_2	0,017 5423
t_2-t_1	30,972 43	τ	0,532 7908		
n_1^0	0,515 4362	$\frac{1}{6}\tau_1\tau_2$	0,011 8165	c_1+c_2	0,035 4494
n_2^0	0,484 5638			$\frac{1}{3}(c_1+c_2)$	0,011 8165
PD	−0,000 7996	P	1,9328		
QD	−0,000 81304	Q	1,9653		

Следовательно, уравнения Лагранжа имеют в настоящем случае такой вид:

$$\rho=1{,}9328-1{,}9653r^{-3},\quad r^2=(\rho+0{,}966552)^2+0{,}098758.$$

Решение этой системы (см. § 8) дает

$$\rho=1{,}8461,\quad r^2=8{,}009769,\quad r^{-3}=0{,}04411.$$

Контроль и вычисление отношений n_1, n_2:

x	−0,529 544	c_1r^{-3}	0,000 7897
y	−2,643 987	c_2r^{-3}	0,000 7736
z	−0,859 470		
		n_1	0,516 226
r^2	8,009 773	n_2	0,485 337

После этого обращаемся к уравнениям, дающим ρ_1 и ρ_2 и заканчиваем приближение вычислением аберрационного времени и гелиоцентрических координат:

$\nu_{12}n_1\rho_1$	−0,090 0667	ρ_1	1,826 189	$L\rho_1$	0,010 54
$n_1\rho_1$	0,942 726			$L\rho$	0,010 65
		ρ_2	1,930 246	$L\rho_2$	0,011 14
$\nu_2n_2\rho_2$	−0,245 537				
ν_2n_2	−0,127 205				
x_1	−0,681 488	x_2	−0,366 225	$n_1x_1+n_2x_2$	−0,529 544
y_1	−2,623 841	y_2	−2,656 904	$n_1y_1+n_2y_2$	−2,643 989
z_1	−0,821 459	z_2	−0,897 133	$n_1z_1+n_2z_2$	−0,859 470
r_1^2	8,023 76	r_2^2	7,998 11		
r_1^{-3}	0,04400	r_2^{-3}	0,044 21		

Второе приближение

Пользуемся формулами Гиббса

t_2	37,845 74	B_1	0,005 178	n_1	0,516 2207
t	21,881 92	B_2	0,006 637	n_1^0	0,515 4303
t_1	6,873 91	B	0,029 561	$n_1-n_1^0$	0,000 7904

t_2-t	15,963 82	$1+B_1r_1^{-3}$	1,000 2278	n_2	0,485 3449
$t-t_1$	15,008 01	$1+B_2r_2^{-3}$	1,000 2934	n_2^0	0,484 5697
t_2-t_1	30,971 83	$1-Br^{-3}$	0,998 6963	$n_2-n_2^0$	0,000 7752
τ	0,532 7805	n_1/n_1^0	1,001 5335	c_1	0,017 9175
τ^2	0,283 8550	n_2/n_2^0	1,001 5998	c_2	0,017 5729
		r^3	22,668 9		
PD	−0,000 7995	P	1,9326	ρ	1,8458
				r^2	8,008 082
QD	−0,000 81416	Q	1,9680	r^{-3}	0,0441
$\nu_{12}n_1\rho_1$	−0,090 0498	ρ_1	1,825 864	x	−0,529 459
$n_1\rho_1$	−0,942 549			y	−2,643 709
		ρ_2	1,929 956	z	−0,859 396
$\nu_2n_2\rho_2$	0,245 504				
				r^2	8,080 086
ν_2n_2	−0,127 207				
x_1	−0,681 413	x_2	−0,366 131	$n_1x_1+n_2x_2$	−0,529 459
y_1	−2,623 534	y_2	−2,656 641	$n_1y_1+n_2y_2$	−2,643 710
z_1	−0,821 382	z_2	−0,897 057	$n_1z_1+n_2z_2$	−0,859 396
r_1^2	8,021 923	r_2^2	7,996 505		
r_1	2,832 300	r_2	2,827 809	r_1r_2	8,009 203

Вычисление элементов орбиты по полученным во втором приближении гелиоцентрическим координатам было уже нами выполнено (§ 9 гл. V). Как окончательный результат, мы имеем следующую систему элементов:

Эпоха $t_0 = 1931$ июль 7,0

M_0	350°,6519	ω	165°,2618	Эклиптика и
φ	3°,5339	i	11°,2365	равноденствие
n	0°,188 675	Ω	107°,2581	1931,0

В заключение приводим представление одного из наблюдений, не употреблявшихся при вычислении орбиты:

t	$17^d,854\ 24$	X	+0,076 786
α	$16^h55^m33^s,85$	Y	+0,929 502
δ	$-14°4'41'',5$	Z	+0,403 163

Наблюденные координаты исправлены за параллакс, поэтому координаты Солнца взяты геоцентрические:

$L\rho$	0,010 59	$\rho\cos\delta\cos\alpha$	—0,493 733
		$\rho\cos\delta\sin\alpha$	—1,709 540
t^*	17,843 65	$\operatorname{tg}\alpha$	3,462 479
M	347°,037 59	α	253°, 890 73
E	346,194 87	$\rho\sin\delta$	—0,446 249
		$\rho\cos\delta$	+1,779 410
$\sin E$	—0,238 620		
$\cos E$	+0,971 113	$\operatorname{tg}\delta$	—0,250 785
$\cos E - e$	+0,909 474	δ	—14°,078 06
		α	$16^h 55^m 33^s,78$
		δ	—14°4′ 41″,0

Итак: Н. — В. $\Delta\alpha = +0^s,07$, $\Delta\delta = -0'',5$

Отсюда заключаем, что вычисление не содержит значительных ошибок. Так как взятое наблюдение довольно близко к одному из наблюдений, употребленных при определении орбит, то полученный результат еще не может полностью гарантировать безошибочности употребленных наблюдений: только представление наблюдения, далеко отстоящего от этих последних, могло бы дать такую гарантию.

Примечание I. При вычислении первого приближения мы пользовались приближенными формулами (4.6) для n_1 и n_2. Если бы вместо них мы взяли формулы (4.9), предложенные Андуайе, то уравнения Лагранжа имели бы вид

$$\rho = 1{,}9328 - 1{,}9653\,(r^3 - 0{,}0473)^{-1};\quad r^2 = (\rho + 0{,}966\,552)^2 + 0{,}098\,758.$$

Решение этих уравнений почти столь же просто, как и уравнений (8.7). Взяв опять за исходное приближение $\rho = 1{,}83$, $r^2 = 7{,}919\,46$, получим $\rho = 1{,}8459$, $r^2 = 8{,}008\,644$, т. е. практически то же самое, что было получено выше во втором приближении при помощи формул Гиббса. Таким образом, употребление в первом приближении формул Андуайе дает здесь реальный выигрыш в точности и могло бы избавить от выполнения второго приближения. Это связано с тем, что эксцентриситет орбиты очень мал.

Примечание II. Остановимся еще на вопросе о той точности, с которой получены элементы орбиты в рассмотренном нами примере.

Легко видеть, что число реальных знаков как в гелиоцентрических координатах, так и в полученных из них элементов не превышает трех-четырех. В самом деле, мы получили $D = -0{,}000\,4137$, причем последний знак здесь очень мало надежен. Поэтому коэффициенты P и Q уравнения Лагранжа имеют не более 3—4 реальных знаков, а следовательно, ρ может быть найдено только с такой точностью. Поскольку все остальные неизвестные — геоцентрические расстояния, гелиоцентрические координаты и элементы вычисляются при помощи полученного значения ρ, их реальная точность не может быть выше.

Тем не менее, чтобы получить элементы, представляющие наблюдения в пределах принятой нами точности (т. е. до $0'',1$), необходимо все дальнейшие вычисления вести с шестью знаками и сохранить соответствующее число знаков в результатах.

Причина заключается в том, что все элементы связаны между собой: конечно, мы можем изменять как угодно нереальные знаки какого-либо элемента (например, отбросить их), но при этом мы должны — для того, чтобы исходные наблюдения были точно удовлетворены, — произвести соответственное изменение в остальных элементах.

Чтобы лучше уяснить механизм этого явления, возьмем следующий простой пример: нужно найти x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$0{,}84852x + 0{,}36444y - 0{,}16559 = 0,$$
$$0{,}87816x + 0{,}37732y - 0{,}17232 = 0,$$

с точностью до единицы пятого знака.

Решая эти уравнения относительно x, получим (сохраняем один запасный знак)

$$x = -\frac{0{,}000\,320}{0{,}000\,127} = -2{,}52.$$

Соответствующее значение y находим из второго уравнения:

$$y = 6{,}32165.$$

Конечно, реальных значащих цифр в x, а потому и в y, только две; но если бы мы взяли, ограничиваясь лишь реальными знаками,

$$x = -2{,}5, \quad y = 6{,}3,$$

то левые части наших уравнений обратились бы в

$$+0{,}00908, \quad +0{,}00940,$$

т. е. уравнения были бы удовлетворены лишь с точностью до 0,01.

Легко видеть, что x можно дать любое значение в пределах от —2,50 до —2,54. Если соответствующее значение y вычислим с пятью десятичными знаками, то эта пара значений неизвестных будет удовлетворять заданным уравнениям с точностью до 0,00001.

Совершенно такое же явление имеет место при нахождении элементов орбиты из наблюдений: в этом случае все неизвестные задачи выражаются через одну (ρ в способе Лагранжа — Гаусса), на которой и отражается неопределенность решения; но коль скоро значение этой неизвестной фиксировано (в пределах тех 3—4 знаков, которые имеют реальное значение), все остальные неизвестные должны вычисляться с той точностью, с которой мы желаем удовлетворить исходным наблюдениям, т. е. с 5—6 знаками.

§ 11. Особые случаи при вычислении орбиты по трем наблюдениям

В предыдущих параграфах рассмотрен общий случай нахождения орбиты по трем наблюдениям. Остановимся теперь на тех осложнениях, которые могут встретиться, если полученные из наблюдений координаты светила обладают некоторыми специальными свойствами.

Отметим прежде всего, что возможны такие случаи, когда три наблюдения недостаточны для нахождения орбиты. В самом деле, если светило движется по эллипсу в плоскости эклиптики, то его движение определяется четырьмя элементами: a, e, M_0 и долготой перигелия π. Между тем три наблюдения дают в этом случае только три координаты, а потому позволяют составить только три уравнения. Таким образом, в этом случае для