исходные наблюдения были точно удовлетворены, — произвести соответственное изменение в остальных элементах.

Чтобы лучше уяснить механизм этого явления, возьмем следующий простой пример: нужно найти x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$0{,}84852x + 0{,}36444y - 0{,}16559 = 0,$$
$$0{,}87816x + 0{,}37732y - 0{,}17232 = 0,$$

с точностью до единицы пятого знака.

Решая эти уравнения относительно x, получим (сохраняем один запасный знак)

$$x = -\frac{0{,}000\,320}{0{,}000\,127} = -2{,}52.$$

Соответствующее значение y находим из второго уравнения:

$$y = 6{,}32165.$$

Конечно, реальных значащих цифр в x, а потому и в y, только две; но если бы мы взяли, ограничиваясь лишь реальными знаками,

$$x = -2{,}5, \quad y = 6{,}3,$$

то левые части наших уравнений обратились бы в

$$+0{,}00908, \quad +0{,}00940,$$

т. е. уравнения были бы удовлетворены лишь с точностью до 0,01.

Легко видеть, что x можно дать любое значение в пределах от $-2{,}50$ до $-2{,}54$. Если соответствующее значение y вычислим с пятью десятичными знаками, то эта пара значений неизвестных будет удовлетворять заданным уравнениям с точностью до 0,00001.

Совершенно такое же явление имеет место при нахождении элементов орбиты из наблюдений: в этом случае все неизвестные задачи выражаются через одну (ρ в способе Лагранжа — Гаусса), на которой и отражается неопределенность решения; но коль скоро значение этой неизвестной фиксировано (в пределах тех 3—4 знаков, которые имеют реальное значение), все остальные неизвестные должны вычисляться с той точностью, с которой мы желаем удовлетворить исходным наблюдениям, т. е. с 5—6 знаками.

§ 11. Особые случаи при вычислении орбиты по трем наблюдениям

В предыдущих параграфах рассмотрен общий случай нахождения орбиты по трем наблюдениям. Остановимся теперь на тех осложнениях, которые могут встретиться, если полученные из наблюдений координаты светила обладают некоторыми специальными свойствами.

Отметим прежде всего, что возможны такие случаи, когда три наблюдения недостаточны для нахождения орбиты. В самом деле, если светило движется по эллипсу в плоскости эклиптики, то его движение определяется четырьмя элементами: a, e, M_0 и долготой перигелия π. Между тем три наблюдения дают в этом случае только три координаты, а потому позволяют составить только три уравнения. Таким образом, в этом случае для нахождения элементов орбиты необходимо иметь четыре наблюдения.

Конечно, ни одна планета или комета не движется совершенно точно в плоскости эклиптики. Но в тех довольно часто встречающихся на практике случаях, когда наклон орбиты малой планеты не превышает нескольких градусов, коэффициенты P и Q в уравнениях Лагранжа (§ 4) становятся столь мало точными (в предельном случае, когда светило движется в плоскости эклиптики, они принимают неопределенный вид $\frac{0}{0}$), что для определения геоцентрических расстояний приходится брать не три, а четыре наблюдения.

Следует отметить, что употребление четырех наблюдений вместо трех позволяет заметно точнее вычислить коэффициенты уравнений, с помощью которых находятся геоцентрические расстояния. Поэтому иногда может оказаться выгодным воспользоваться четырьмя наблюдениями в таких случаях, когда можно было бы вычислить орбиту и по трем наблюдениям, например, в тех случаях, когда не удается подобрать три наблюдения, разделенные достаточно одинаковыми интервалами времени.

В §§ 4—6 было показано, что нахождение геоцентрических расстояний светила основано, в конечном счете, на решении системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} D\rho &= U - n_1U_1 - n_2U_2, \\ r^2 &= \rho^2 + 2C\rho + R^2 \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

относительно ρ и r, причем

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \tag{11.2}$$

а U, U_1, U_2 выражаются формулами

$$U = \begin{vmatrix} X & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y & \mu_1 & \mu_2 \\ Z & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad U_1 = \begin{vmatrix} X_1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_1 & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_1 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad U_2 = \begin{vmatrix} X_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_2 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}. \tag{11.3}$$

Затруднения при решении системы (11.1) могут возникнуть только в том случае, когда $D=0$.

Напишем это соотношение следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \rho\lambda & \rho_1\lambda_1 & \rho_2\lambda_2 \\ \rho\mu & \rho_1\mu_1 & \rho_2\mu_2 \\ \rho\nu & \rho_1\nu_1 & \rho_2\nu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $(\rho\lambda, \rho\mu, \rho\nu)$, $(\rho_1\lambda_1, \rho_1\mu_1, \rho_1\nu_1)$, ... суть не что иное, как прямоугольные геоцентрические координаты, то это равенство означает, что три рассматриваемые положения светила находятся в плоскости, проходящей через центр Земли, а потому видимые положения светила, определяемые направляющими косинусами (λ, μ, ν), ..., находятся на большом круге.

Итак, определитель D равен нулю тогда и только тогда, когда три видимые положения светила лежат на одном большом круге.

Рассмотрим решение уравнений (11.1) при условии $D=0$. Здесь могут представиться следующие случаи:

Первый случай. Определители (11.3) не все равны нулю. Если бы две из величин U, U_1, U_2 были равны нулю, то третья также была бы равна нулю в силу (11.1). Таким образом, по крайней мере одна из величин U_1, U_2 не равна нулю.

Поэтому, подставляя в первое уравнение (11.1) выражения (§ 4)

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3},$$

получим уравнение

$$0 = -n_1^0 U_1 + U - n_2^0 U_2 - (c_1 U_1 + c_2 U_2) r^{-3}, \tag{11.4}$$

позволяющее найти r.

Второе из уравнений (11.1) даст ρ.

Второй случай. $U=U_1=U_2=0$. В этом случае первое из уравнений (11.1) обращается в тождество, и вычисление ρ при помощи трех взятых наблюдений становится невозможным. Посмотрим, когда этот случай может встретиться.

Предположим сначала, что не все миноры

$$\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1, \quad \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1, \quad \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \tag{11.5}$$

определителя (11.2) равны нулю. В таком случае равенство $U_1=0$, написанное в форме

$$\begin{vmatrix} X_1 & \rho_1\lambda_1 & \rho_2\lambda_2 \\ Y_1 & \rho_1\mu_1 & \rho_2\mu_2 \\ Z_1 & \rho_1\nu_1 & \rho_2\nu_2 \end{vmatrix} = 0,$$

будет означать, что геоцентрическое положение Солнца в первый момент находится в той проходящей через центр Земли плоскости, в которой лежат все три положения светила. Аналогично интерпретируются равенства $U=0$ и $U_2=0$. Таким образом, в этом случае большой круг небесной сферы, на котором лежат видимые положения светила, заключает соответствующие положения Солнца, т. е. совпадает с эклиптикой.

Если миноры (11.5) равны нулю, то это дает

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\nu_1}{\nu_2},$$

а потому $\lambda_1=\lambda_2$, $\mu_1=\mu_2$, $\nu_1=\nu_2$ (случай $\lambda_1=-\lambda_2$, $\mu_1=-\mu_2$, $\nu_1=-\nu_2$, как не представляющий практического интереса, отбрасываем), т. е. видимые положения светила для крайних моментов совпадают. В этом случае можно, если не все миноры

$$\mu_1\nu-\mu\nu_1, \quad \nu_1\lambda-\nu\lambda_1, \quad \lambda_1\mu-\lambda\mu_1$$

равны нулю, составить уравнение, аналогичное (11.4), и вычислить r_1 и ρ_1, после чего из основных уравнений найдем ρ_2. Наконец, если и эти миноры равны нулю, то все три геоцентрические положения светила совпадают (случай диаметрально противоположных положений опять исключаем), и мы бессильны найти орбиту из таких наблюдений.

Таким образом, **вычисление орбиты по трем наблюдениям полностью невозможно в двух случаях:**

1) **когда все три наблюденные положения светила совпадают;**

2) **когда три наблюденные положения светила лежат на эклиптике.**

Первый из этих случаев для реальных наблюдений не может иметь места, а во втором случае для нахождения орбиты необходимо иметь, как мы уже видели, четыре наблюдения.

Не только тогда, когда наблюденные положения светила близки к эклиптике, но и во всех тех случаях, когда определитель D очень мал, следует вычислять орбиту не по трем, а по четырем наблюдениям. Но тогда уравнение (11.4) представляет только теоретический интерес, так как вследствие малости c_1 и c_2 не позволяет находить r с достаточной точностью *).

*) О вычисленни орбиты по четырем иаблюдениям см. § 1 гл. X.