сманна — Вахманна I и для кометы Отерма эксцентриситеты равны соответственно 0,136 и 0,143) и несколько комет с эксцентриситетами, близкими к 0,4 и 0,5. Но такие случаи, когда параболическая орбита оказывается сразу же непригодной для представления наблюдений, встречаются сравнительно редко.

Между тем вычисление орбиты в предположении, что эксцентриситет равен единице, имеет существенные преимущества. Здесь приходится находить из шести уравнений, даваемых тремя наблюдениями, не шесть, а только пять неизвестных. Благодаря этому обстоятельству, т. е. неполному использованию уравнений, наблюдения, непригодные для вычисления орбиты общего вида (без фиксированной заранее величины эксцентриситета), могут быть вполне пригодными для получения хорошей параболической орбиты. Особенно важно то, что для вычисления параболической орбиты могут быть взяты наблюдения, разделенные очень малыми интервалами времени (равными, например, 1—2 суткам). Применение общего метода, изложенного в предыдущей главе, здесь невозможно, так как определитель D практически равен нулю, между тем вычисление параболической орбиты оказывается вполне возможным. Вычисление орбиты по очень близким наблюдениям приходится делать потому, что для вновь открытой кометы (обычно очень слабой и быстро движущейся) весьма важно как можно скорее дать эфемериду, обеспечивающую возможность дальнейших наблюдений *).

§ 2. Основные уравнения. Первое приближение

Как и раньше, обозначим через (α_1, δ_1), (α, δ) и (α_2, δ_2) прямые восхождения и склонения кометы, соответствующие моментам наблюдений t_1, t и t_2 $(t_1<t<t_2)$, и положим

$$\lambda_1 = \cos\delta_1 \cos\alpha_1, \quad \mu_1 = \cos\delta_1 \sin\alpha_1, \quad \nu_1 = \sin\delta_1,$$

и аналогично (λ, μ, ν), $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ для моментов t и t_2.

Через (X_1, Y_1, Z_1), (X, Y, Z), (X_2, Y_2, Z_2) обозначим координаты Солнца в моменты наблюдений.

Условие нахождения трех гелиоцентрических положений кометы в плоскости, проходящей через центр Солнца, приводит, как мы уже знаем, к таким уравнениям (§ 3 гл. VIII):

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 n_1 \rho_1 - \lambda\rho + \lambda_2 n_2 \rho_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2, \\ \mu_1 n_1 \rho_1 - \mu\rho + \mu_2 n_2 \rho_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, \\ \nu_1 n_1 \rho_1 - \nu\rho + \nu_2 n_2 \rho_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

*) Метод определения орбиты, годный для всех значений эксцентриситета, предложен Мультоном [1901]. (*Прим. ред.*)

где ρ_1, ρ, ρ_2 — геоцентрические (или топоцентрические) расстояния кометы, а n_1 и n_2 — отношения площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами:

$$n_1 = \frac{[rr_2]}{[r_1r_2]}; \quad n_2 = \frac{[r_1r]}{[r_1r_2]}.$$

Исключение ρ из уравнений (2.1) дает три соотношения между ρ_1 и ρ_2. Например, исключая ρ из первого и второго уравнений, получим

$$(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2) n_2\rho_2 + (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1) n_1\rho_1 = \\ = -(\lambda Y - \mu X) + (\lambda Y_1 - \mu X_1) n_1 + (\lambda Y_2 - \mu X_2) n_2.$$

В дальнейшем нам будет нужно только одно из этих уравнений. Выбранное уравнение мы представим в таком виде:

$$\rho_2 = M\rho_1 + m, \tag{2.2}$$

где

$$M = K\frac{n_1}{n_2}; \quad m = L_1\frac{n_1}{n_2} + L_2\frac{1}{n_2} + L_3, \tag{2.3}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} K &= -\frac{\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}, & L_1 &= \frac{\lambda Y_1 - \mu X_1}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}; \\ L_2 &= -\frac{\lambda Y - \mu X}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}; & L_3 &= \frac{\lambda Y_2 - \mu X_2}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Если бы коэффициенты M и m уравнения (2.2) были известны, то для каждого значения ρ_1 мы могли бы вычислить ρ_2, а следовательно, и гелиоцентрические координаты

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1, & x_2 &= \lambda_2\rho_2 - X_2, \\ y_1 &= \mu_1\rho_1 - Y_1, & y_2 &= \mu_2\rho_2 - Y_2, \\ z_1 &= \nu_1\rho_1 - Z_1, & z_2 &= \nu_2\rho_2 - Z_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

для моментов двух крайних наблюдений, после чего известные формулы

$$\left.\begin{aligned} &r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ &s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

дали бы соответствующие значения r_1, r_2 и s.

Таким образом, при помощи уравнения Эйлера

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2} \tag{2.7}$$

мы могли бы найти промежуток времени $\tau = k(t_2 - t_1)$, соответствующий выбранному нами значению ρ_1. Варьируя значение ρ_1 до тех пор, пока значение τ, даваемое равенством (2.7), не совпадет со значением, полученным из наблюдений, мы найдем ρ_1, а следовательно, и ρ_2; попутно будут найдены гелиоцентрические координаты (2.5), позволяющие легко вычислить элементы орбиты § 5 гл. V.

Поскольку коэффициенты M и m содержат неизвестные величины n_1 и n_2, задача может быть решена только последовательными приближениями.

Легко видеть (§ 5 гл. VIII), что выражения

$$\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda\mu_2 - \mu\lambda_2$$

являются малыми величинами первого порядка. Поэтому, как показывают формулы (2.4), ошибки порядка h в n_1 и n_2 дадут в M ошибку тоже порядка h, а в m — ошибку порядка $h-1$.

Взяв самые простые приближенные значения

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau},$$

имеющие ошибки второго порядка (§ 2 гл. VIII), мы уже получим, следовательно, коэффициенты уравнения (2.2) с точностью, достаточной для первого приближения.

При выполнении вычислений уравнение (2.7) следует брать в форме (§ 12 гл. V)

$$\theta_0 (2\tau)^2 - s^2 (r_1 + r_2) = 0, \tag{2.8}$$

чтобы избежать потери точности, связанной с вычислением правой части равенства (2.7) при малых значениях хорды s.

§ 3. Второе приближение

Для второго приближения нужно перевычислить коэффициенты уравнения (2.2), взяв более точные значения n_1 и n_2.

Так как в результате первого приближения гелиоцентрические координаты получены с ошибками первого порядка малости, то нет надобности употреблять точные формулы (§ 6 гл. VIII) для вычисления n_1 и n_2. Здесь могут быть употреблены гораздо более удобные приближенные формулы, дающие эти величины с ошибками четвертого порядка, т. е. с точностью, вполне достаточной для второго приближения.

Для вывода таких формул обратимся к разложениям (2.6) гл. VIII. Взяв в них члены до третьего порядка включительно, получим

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau}\left[1 + \frac{1}{6}(\tau^2 - \tau_1^2) r^{-3} + \frac{1}{4}\tau_2(\tau\tau_2 - \tau_1^2) r^{-4} r' + \ldots\right], \\ n_2 &= \frac{\tau_2}{\tau}\left[1 + \frac{1}{6}(\tau^2 - \tau_2^2) r^{-3} - \frac{1}{4}\tau_1(\tau\tau_1 - \tau_2) r^{-4} r' + \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$