а следовательно, и ρ_2; попутно будут найдены гелиоцентрические координаты (2.5), позволяющие легко вычислить элементы орбиты § 5 гл. V.

Поскольку коэффициенты M и m содержат неизвестные величины n_1 и n_2, задача может быть решена только последовательными приближениями.

Легко видеть (§ 5 гл. VIII), что выражения

$$\lambda\mu_1-\mu\lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda\mu_2-\mu\lambda_2$$

являются малыми величинами первого порядка. Поэтому, как показывают формулы (2.4), ошибки порядка h в n_1 и n_2 дадут в M ошибку тоже порядка h, а в m — ошибку порядка $h-1$.

Взяв самые простые приближенные значения

$$n_1=\frac{\tau_1}{\tau}, \quad n_2=\frac{\tau_2}{\tau},$$

имеющие ошибки второго порядка (§ 2 гл. VIII), мы уже получим, следовательно, коэффициенты уравнения (2.2) с точностью, достаточной для первого приближения.

При выполнении вычислений уравнение (2.7) следует брать в форме (§ 12 гл. V)

$$\theta_0(2\tau)^2-s^2(r_1+r_2)=0, \tag{2.8}$$

чтобы избежать потери точности, связанной с вычислением правой части равенства (2.7) при малых значениях хорды s.

§ 3. Второе приближение

Для второго приближения нужно перевычислить коэффициенты уравнения (2.2), взяв более точные значения n_1 и n_2.

Так как в результате первого приближения гелиоцентрические координаты получены с ошибками первого порядка малости, то нет надобности употреблять точные формулы (§ 6 гл. VIII) для вычисления n_1 и n_2. Здесь могут быть употреблены гораздо более удобные приближенные формулы, дающие эти величины с ошибками четвертого порядка, т. е. с точностью, вполне достаточной для второго приближения.

Для вывода таких формул обратимся к разложениям (2.6) гл. VIII. Взяв в них члены до третьего порядка включительно, получим

$$\left.\begin{aligned} n_1&=\frac{\tau_1}{\tau}\left[1+\frac{1}{6}(\tau^2-\tau_1^2)r^{-3}+\frac{1}{4}\tau_2(\tau\tau_2-\tau_1^2)r^{-4}r'+\ldots\right],\\ n_2&=\frac{\tau_2}{\tau}\left[1+\frac{1}{6}(\tau^2-\tau_2^2)r^{-3}-\frac{1}{4}\tau_1(\tau\tau_1-\tau_2)r^{-4}r'+\ldots\right].\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Входящие сюда величины r и r' легко выразить через r_1 и r_2, непосредственно получаемые в процессе первого приближения. В самом деле, разложение в ряд Тэйлора дает

$$r_1 = r - \tau_2 r' + \ldots; \quad r_2 = r + \tau_1 r' + \ldots;$$

откуда

$$r' = \frac{r_2 - r_1}{\tau} + \ldots; \quad r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2}\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau}(r_2 - r_1) + \ldots$$

Таким образом, с достаточной для наших целей точностью,

$$r^{-3} = \frac{8}{(r_1 + r_2)^3} + 24\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau}\frac{r_2 - r_1}{(r_1 + r_2)^4} + \ldots,$$

$$r^{-4} r' = \frac{16}{\tau}\frac{r_2 - r_1}{(r_1 + r_2)^4} + \ldots$$

Подставив эти выражения в (3.1) и положив

$$\xi = \frac{4}{3}(r_1 + r_2)^{-3}; \quad \eta = 3(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)^{-1},$$

получим

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau}\left[1 + \xi(\tau^2 - \tau_1^2) + \xi\eta\frac{\tau_1^2\tau_2}{\tau}\right], \\ n_2 &= \frac{\tau_2}{\tau}\left[1 + \xi(\tau^2 - \tau_2^2) - \xi\eta\frac{\tau_1\tau_2^2}{\tau}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Эти приближенные выражения, имеющие ошибки четвертого порядка, носят название ф о р м у л О п п о л ь ц е р а [1870], хотя они были найдены и использованы Энке [1831] раньше Оппольцера.

Из (3.2) легко получаем с тою же точностью выражения

$$\left.\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} + \tau_1\xi\left[\tau\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + \tau_1\eta\right], \\ \frac{1}{n_2} &= \frac{\tau}{\tau_2} - \tau_1\xi\left[\tau\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right) - \tau_2\eta\right], \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

фигурирующие в коэффициентах (2.3) основного уравнения.

Вторым приближением заканчивается обычно уточнение коэффициентов M и m уравнения (2.2). Если второе приближение оказывается недостаточным для хорошего представления наблюдений, то дальнейшее улучшение гелиоцентрических координат следует производить способом вариации отношения геоцентрических расстояний (§ 6) *).

*) О влиянии неточности коэффициентов M и m на представление наблюдений см. Б. Стрёмгрен [1929]. (*Прим. ред.*)

Примечание. Для второго приближения вместо формул Оппольцера можно пользоваться также формулами Гиббса, ошибки которых, в случае равноотстоящих наблюдений, будут пятого порядка (§ 7 гл. VIII).

При употреблении формул Гиббса надо знать не только r_1 и r_2 (получаемые в ходе первого приближения), но и r. Чтобы получить эту величину с достаточной для наших целей точностью, проще всего воспользоваться следующим приближенным соотношением

$$r^2 = \frac{\tau_1}{\tau} r_1^2 + \frac{\tau_2}{\tau} r_2^2 - \frac{\tau_1\tau_2}{r}, \tag{3.4}$$

дающим r с ошибкой третьего порядка.

Соотношение (3.4) может быть получено из выведенной нами (§ 7 гл. VIII) общей зависимости между тремя значениями X_1, X, X_2 некоторой функции и соответствующими значениями X_1'', X'', X_2'' ее второй производной. Применив эту зависимость к функции $X=r^2$ и заметив, что

$$(r^2)'' = 2(r^{-1} - a^{-1}),$$

получим

$$\tau_1 r_1^2 - \tau r^2 + \tau_2 r_2^2 = 2\left(\tau_1 B_1 r_1^{-1} + \tau B r^{-1} + \tau_2 B_2 r_2^{-1}\right) - \tau\tau_1\tau_2 a^{-1}, \tag{3.5}$$

где B_1, B, B_2 даются равенствами (7.1) гл. VIII.

Если в правой части равенства (3.5), имеющей ошибку пятого порядка, положить $r_1=r_2=r$, то получим соотношение

$$\tau_1 r_1^2 - \tau r^2 + \tau_2 r_2^2 = \tau\tau_1\tau_2(r^{-1} - a^{-1}), \tag{3.6}$$

погрешность которого четвертого порядка.

Для случая параболического движения отсюда получаем равенство (3.4). Заметим, что в правой части этого равенства можно положить, не изменяя порядка точности, $r=r_1$ или $r=r_2$.

§ 4. Сопоставление формул для вычисления параболической орбиты

Для моментов наблюдений t_1, t, t_2 $(t_1<t<t_2)$ даны геоцентрические (или топоцентрические) координаты кометы

$$(\alpha_1, \delta_1), \quad (\alpha, \delta), \quad (\alpha_2, \delta_2)$$

и Солнца

$$(X_1, Y_1, Z_1), \quad (X, Y, Z), \quad (X_2, Y_2, Z_2).$$

Все эти координаты должны быть отнесены к одному и тому же экватору и равноденствию.

От сферических координат переходим к соответствующим направляющим косинусам:

$$\lambda_1 = \cos\delta_1 \cos\alpha_1; \quad \mu_1 = \cos\delta_1 \sin\alpha_1; \quad \nu_1 = \sin\delta_1$$

и аналогично для (λ, μ, ν), $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

Контроль:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1; \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1; \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1.$$