Примечание. Для второго приближения вместо формул Оппольцера можно пользоваться также формулами Гиббса, ошибки которых, в случае равноотстоящих наблюдений, будут пятого порядка (§ 7 гл. VIII).

При употреблении формул Гиббса надо знать не только r_1 и r_2 (получаемые в ходе первого приближения), но и r. Чтобы получить эту величину с достаточной для наших целей точностью, проще всего воспользоваться следующим приближенным соотношением

$$r^2 = \frac{\tau_1}{\tau} r_1^2 + \frac{\tau_2}{\tau} r_2^2 - \frac{\tau_1\tau_2}{r}, \tag{3.4}$$

дающим r с ошибкой третьего порядка.

Соотношение (3.4) может быть получено из выведенной нами (§ 7 гл. VIII) общей зависимости между тремя значениями X_1, X, X_2 некоторой функции и соответствующими значениями X''_1, X'', X''_2 ее второй производной. Применив эту зависимость к функции $X=r^2$ и заметив, что

$$(r^2)'' = 2(r^{-1} - a^{-1}),$$

получим

$$\tau_1 r_1^2 - \tau r^2 + \tau_2 r_2^2 = 2\left(\tau_1 B_1 r_1^{-1} + \tau B r^{-1} + \tau_2 B_2 r_2^{-1}\right) - \tau\tau_1\tau_2 a^{-1}, \tag{3.5}$$

где B_1, B, B_2 даются равенствами (7.1) гл. VIII.

Если в правой части равенства (3.5), имеющей ошибку пятого порядка, положить $r_1=r_2=r$, то получим соотношение

$$\tau_1 r_1^2 - \tau r^2 + \tau_2 r_2^2 = \tau\tau_1\tau_2 (r^{-1} - a^{-1}), \tag{3.6}$$

погрешность которого четвертого порядка.

Для случая параболического движения отсюда получаем равенство (3.4). Заметим, что в правой части этого равенства можно положить, не изменяя порядка точности, $r=r_1$ или $r=r_2$.

§ 4. Сопоставление формул для вычисления параболической орбиты

Для моментов наблюдений t_1, t, t_2 ($t_1<t<t_2$) даны геоцентрические (или топоцентрические) координаты кометы

$$(\alpha_1, \delta_1), \quad (\alpha, \delta), \quad (\alpha_2, \delta_2)$$

и Солнца

$$(X_1, Y_1, Z_1), \quad (X, Y, Z), \quad (X_2, Y_2, Z_2).$$

Все эти координаты должны быть отнесены к одному и тому же экватору и равноденствию.

От сферических координат переходим к соответствующим направляющим косинусам:

$$\lambda_1 = \cos\delta_1 \cos\alpha_1; \quad \mu_1 = \cos\delta_1 \sin\alpha_1; \quad \nu_1 = \sin\delta_1$$

и аналогично для (λ, μ, ν), $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

Контроль:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1; \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1; \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1.$$

Из уравнений

$$(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)\, n_2\rho_2 = -(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)\, n_1\rho_1 - (\lambda Y - \mu X) + \\ + (\lambda Y_1 - \mu X_1)\, n_1 + (\lambda Y_2 - \mu X_2)\, n_2,$$

$$(\lambda\nu_2 - \nu\lambda_2)\, n_2\rho_2 = -(\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1)\, n_1\rho_1 - (\lambda Z - \nu X) + \\ + (\lambda Z_1 - \nu X_1)\, n_1 + (\lambda Z_2 - \nu X_2)\, n_2,$$

$$(\mu\nu_2 - \nu\mu_2)\, n_2\rho_2 = -(\mu\nu_1 - \nu\mu_1)\, n_1\rho_1 - (\mu Z - \nu Y) + \\ + (\mu Z_1 - \nu Y_1)\, n_1 + (\mu Z_2 - \nu Y_2)\, n_2$$

выбираем то, у которого коэффициент при ρ_2 наибольший по абсолютной величине. Избранное уравнение представляем в форме

$$\rho_2 = M\rho_1 + m, \tag{A}$$

где

$$M = K\frac{n_1}{n_2}; \quad m = L_1\frac{n_1}{n_2} + L_2\frac{1}{n_2} + L_3.$$

Первое приближение

Принимаем

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{t_2 - t}{t - t_1}; \quad \frac{1}{n_2} = \frac{t_2 - t_1}{t - t_1}$$

и вычисляем соответствующие значения M и m.

Для каждого значения ρ_1 находим ρ_2 и гелиоцентрические координаты

$$x_1 = \lambda_1\rho_1 - X_1; \quad x_2 = \lambda_2\rho_2 - X_2,$$
$$y_1 = \mu_1\rho_1 - Y_1; \quad y_2 = \mu_2\rho_2 - Y_2,$$
$$z_1 = \nu_1\rho_1 - Z_1; \quad z_2 = \nu_2\rho_2 - Z_2.$$

Затем вычисляем радиусы-векторы и хорду

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$
$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

и найденные значения подставляем в

$$f(\rho_1) = \theta_0 (2\tau)^2 - s^2 (r_1 + r_2),$$

где

$$2\tau = 2k(t_2 - t_1),$$
$$2k = 0{,}034\,40420, \quad \lg 2k = 8{,}536\,6114_{-10},$$

а θ_0 берется из таблицы IX по аргументу

$$c = \frac{s^2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

При логарифмическом вычислении полагаем

$$f(\rho_1) = \lg[\theta_0 (2\tau)^2] - \lg[s^2 (r_1 + r_2)].$$

Варьируем ρ_1 до тех пор, пока не получится

$$f(\rho_1)=0.$$

Кроме обычного способа пропорциональных частей, для достижения этой цели можно применить интерполяционную формулу Ньютона. По мере того, как будем получать значения функции $f(\rho_1)$ для различных значений ρ_1, будем составлять таблицу приведенных разностей:

$$\begin{array}{llll}
\rho_1=\rho' & f(\rho_1)=f' & & \\
 & & [f'f''] & \\
\quad=\rho'' & \quad=f'' & & [f'f''f'''], \\
 & & [f''f'''] & \\
\quad=\rho''' & \quad=f''' & &
\end{array}$$

где

$$[f'f'']=\frac{f''-f'}{\rho''-\rho'};\quad [f''f''']=\frac{f'''-f''}{\rho'''-\rho''};\quad [f'f''f''']=\frac{[f''f''']-[f'f'']}{\rho'''-\rho'}.$$

После того как вычислены f' и f'' для двух каких-либо значений $\rho_1=\rho'$ и ρ'', следующее значение ρ_1 находим по способу пропорциональных частей, который дает

$$\rho'''=\rho''-\frac{f''}{[f'f'']}.$$

После трех проб полагаем $\rho_1=\rho'''+x$ и применяем интерполяционную формулу Ньютона

$$f(\rho_1)=f'''+(\rho_1-\rho''')[f''f''']+(\rho_1-\rho''')(\rho_1-\rho'')[f'f''f'''].$$

Полагая $f(\rho_1)=0$, для нахождения x будем иметь такое уравнение:

$$0=f'''+x\{[f''f''']+(\rho'''-\rho'')[f'f''f''']\}+x^2[f'f''f'''].$$

Этот процесс можно было бы продолжить и дальше, но больше четырех проб делать обычно не приходится.

Примечание. Вместо того, чтобы при каждой пробе вычислять гелиоцентрические координаты, можно было бы выразить r_1, r_2 и s непосредственно через ρ_1 и ρ_2.

Подставляя выражения (2.5) в формулы (2.6), получим

$$\left.\begin{aligned}
r_1^2&=(\rho_1+C_1)^2+S_1^2,\\
r_2^2&=(\rho_2+C_2)^2+S_2^2,\\
s^2&=r_1^2+r_2^2+D_1\rho_1+D_2\rho_2-E\rho_1\rho_2-G,
\end{aligned}\right\}\qquad (B)$$

где

$$\begin{aligned}
C_1&=-(\lambda_1X_1+\mu_1Y_1+\nu_1Z_1); & D_1&=2(\lambda_1X_2+\mu_1Y_2+\nu_1Z_2),\\
C_2&=-(\lambda_2X_2+\mu_2Y_2+\nu_2Z_2); & D_2&=2(\lambda_2X_1+\mu_2Y_1+\nu_2Z_1),\\
S_1^2&=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2-C_1^2; & E&=2(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2),\\
S_2^2&=X_2^2+Y_2^2+Z_2^2-C_2^2; & G&=2(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2).
\end{aligned}$$

Второе приближение

При помощи значений ρ_1, ρ_2, полученных в первом приближении, и значения ρ, найденного линейным интерполированием,

$$\rho = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\rho_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\rho_2,$$

исправляем моменты наблюдений за аберрационное время (если, конечно, они не были исправлены раньше; в этом случае только проверяем ранее принятые поправки):

$$t_1^0 = t_1 - L\rho_1; \quad t^0 = t - L\rho; \quad t_2^0 = t_2 - L\rho_2,$$

$$L = 0{,}^d0057756; \quad \lg L = 7{,}761\,597_{-10}.$$

Затем вычисляем

$$\tau = k(t_2^0 - t_1^0); \quad \tau_1 = k(t_2^0 - t^0); \quad \tau_2 = k(t^0 - t_1^0),$$

$$k = 0{,}017\,20210; \quad \lg k = 8{,}235\,5814_{-10},$$

$$\xi = \frac{4}{3}(r_1 + r_2)^{-3}; \quad \eta = 3(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)^{-1},$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} + \tau_1\xi\left[\tau\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + \tau_1\eta\right], \\ \frac{1}{n_2} &= \frac{\tau}{\tau_2} - \tau_1\xi\left[\tau\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right) - \tau_2\eta\right]. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Эти значения подставляем в формулы (A) и с новыми M и m повторяем вычисление ρ_1 и ρ_2.

При третьем и следующих приближениях (если бы таковые понадобились) можно пользоваться точными формулами

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}\frac{\eta}{\eta_1}, \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau}\frac{\eta}{\eta_2},$$

где η, η_1 и η_2 находятся (§ 8 гл. V) по аргументам

$$\mu = \frac{4\tau^2}{(r_1 + r_2)^3}; \quad \mu_1 = \frac{4\tau_1^2}{(r + r_2)^3}; \quad \mu_2 = \frac{4\tau_2^2}{(r_1 + r)^3}.$$

При этом кроме r_1 и r_2 нужно еще будет знать r. С достаточной точностью r можно найти из следующего приближенного уравнения (3.4):

$$r^2 = \frac{\tau_1}{\tau}r_1^2 + \frac{\tau_2}{\tau}r_2^2 - \frac{\tau_1\tau_2}{r}. \tag{C}$$

На практике вместо третьего приближения обычно прибегают к способу варьирования M (§ 4 гл. XI). Варьирование M применяется иногда и вместо второго приближения.

Примечание. Для второго приближения можно пользоваться, вместо формул (B), формулами Гиббса (§ 7 гл. VIII). Для нахождения r служит соотношение (C), в правой части которого можно положить $r=r_1$ или $r=r_2$.

Представление среднего наблюдения

Чтобы убедиться в том, что полученные геоцентрические расстояния достаточно точны, и что взятые наблюдения действительно могут быть представлены параболической орбитой, вычисляем гелиоцентрические координаты кометы для момента среднего наблюдения

$$x = n_1 x_1 + n_2 x_2,$$
$$y = n_1 y_1 + n_2 y_2,$$
$$z = n_1 z_1 + n_2 z_2.$$

Затем из уравнений

$$\rho \cos\delta \cos\alpha = x + X,$$
$$\rho \cos\delta \sin\alpha = y + Y,$$
$$\rho \sin\delta = z + Z$$

находим α и δ.

Если получатся значительные разности α (набл.) — α (выч.) и δ (набл.) — δ (выч.), то нужно еще убедиться, что эти разности не являются следствием вычислительных ошибок. Для этого с вычисленными значениями α и δ находим коэффициенты K, L_1, L_2, L_3 формул (A); если вычисления верны, то должны получиться исходные значения этих коэффициентов.

Вычисление элементов

Используя гелиоцентрические координаты, полученные в последнем приближении, находим

$$\sigma = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) r_1^{-2}.$$

Контроль:

$$2\sigma = 1 + (r_2^2 - s^2) r_1^{-2}.$$

После этого вычисляем

$$x_0 = x_2 - \sigma x_1; \quad y_0 = y_2 - \sigma y_1; \quad z_0 = z_2 - \sigma z_1;$$
$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \quad (r_0 > 0);$$
$$\operatorname{tg} 2f = \frac{r_1 r_0}{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2} = \frac{r_0}{\sigma r_1}.$$

Контроль:

$$\sin f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(s+r_1-r_2)(s-r_1+r_2)}{r_1 r_2}}$$

Затем

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1 = \operatorname{ctg} f - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\operatorname{cosec} f,$$

$$v_2 = v_1 + 2f,$$

$$q = r_1\cos^2\frac{1}{2}v_1 = r_2\cos^2\frac{1}{2}v_2,$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\sigma_1 + \frac{1}{3}\sigma_1^3\right); \quad \sigma_1 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1;$$

$$B_2 = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\sigma_2 + \frac{1}{3}\sigma_2^3\right); \quad \sigma_2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}v_2.$$

B_1 и B_2 могут быть найдены по таблице V;

$$T = t_1^0 - q^{3/2}B_1 = t_2^0 - q^{3/2}B_2.$$

Вычисление векторных элементов:

$$\begin{Vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_0 \\ y_1 & y_0 \\ z_1 & z_0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} +r_1^{-1}\cos v_1 & +r_1^{-1}\sin v_1 \\ -r_0^{-1}\sin v_1 & +r_0^{-1}\cos v_1 \end{Vmatrix}$$

и величин

$$m_x = qP_x; \quad m_y = qP_y; \quad m_z = qP_z,$$

$$n_x = 2qQ_x; \quad n_y = 2qQ_y; \quad n_z = 2qQ_z.$$

Контроль:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = q^2; \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 4q^2,$$

$$m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z = 0.$$

Относительно вычисления эклиптических элементов Ω, i, ω см. формулы (1.11) гл. V.

Представление наблюдений

Момент наблюдения t исправляем за планетную аберрацию

$$t^0 = t - L\rho.$$

По аргументу

$$B = q^{-3/2}(t^0 - T)$$

находим σ (таблица V). Геоцентрические координаты кометы вычисляем по формулам

$$\rho\cos\delta\cos\alpha = m_x(1-\sigma^2)+n_x\sigma+X,$$
$$\rho\cos\delta\sin\alpha = m_y(1-\sigma^2)+n_y\sigma+Y,$$
$$\rho\sin\delta = m_z(1-\sigma^2)+n_z\sigma+Z.$$

Координаты Солнца X, Y, Z берутся из эфемерид для момента t.

§ 5. Пример вычисления параболической орбиты

Возьмем следующие наблюдения кометы 1909I (Daniel), которыми пользовался Лойшнер [1913] для иллюстрации данной им модификации метода Лапласа:

Место наблюдения	1909	Gr. M. T.	α(1909,0)	δ (1909,0)
Nice	Июнь	16,5306	25°28′38″	+29°58′25″
Lick	»	18,9809	27 12 29	+33 26 22
Lick	»	21,9659	29 27 51	+37 25 17

Местное звездное время каждого наблюдения и приведения координат Солнца к месту наблюдения (§ 1 гл. VII), выраженные в единицах шестого знака, таковы:

Июнь	Местное зв. вр.	ΔX	ΔY	ΔZ
16	$18^h 51^m,8$	−7	+30	−29
18	21 14,1	−25	+23	−26
21	21 4,3	−24	+24	−26

Придав эти поправки к взятым из эфемерид геоцентрическим координатам Солнца и вычислив направляющие косинусы, будем иметь следующие исходные данные для вычисления орбиты:

	t_1	t	t_2
λ	+0,782 03	+0,742 15	+0,691 46
μ	+0,372 62	+0,381 54	+0,390 64
ν	+0,499 60	+0,551 06	+0,607 67
X	+0,085 427	+0,044 017	−0,006 496
Y	+0,928 905	+0,931 489	+0,932 506
Z	+0,402 916	+0,404 045	+0,404 487

Так как в настоящем случае

$$\lambda\mu_2-\mu\lambda_2=+0{,}026\,094;\quad \lambda\nu_2-\nu\lambda_2=+0{,}069\,946;$$
$$\mu\nu_2-\nu\mu_2=+0{,}016\,584,$$

то берем второе уравнение из числа указанных в § 4 и представляем его в таком виде:

$$\rho_2=0{,}86019\frac{n_1}{n_2}\rho_1+3{,}6021\frac{n_1}{n_2}-3{,}9403\frac{1}{n_2}+4{,}3429. \qquad \text{(A)}$$