находим σ (таблица V). Геоцентрические координаты кометы вычисляем по формулам

$$\rho\cos\delta\cos\alpha = m_x(1-\sigma^2) + n_x\sigma + X,$$
$$\rho\cos\delta\sin\alpha = m_y(1-\sigma^2) + n_y\sigma + Y,$$
$$\rho\sin\delta = m_z(1-\sigma^2) + n_z\sigma + Z.$$

Координаты Солнца X, Y, Z берутся из эфемерид для момента t.

§ 5. Пример вычисления параболической орбиты

Возьмем следующие наблюдения кометы 1909I (Daniel), которыми пользовался Лойшнер [1913] для иллюстрации данной им модификации метода Лапласа:

Место наблюдения	1909	Gr. M. T.	α(1909,0)	δ (1909,0)
Nice	Июнь	16,5306	25°28′38″	+29°58′25″
Lick	»	18,9809	27 12 29	+33 26 22
Lick	»	21,9659	29 27 51	+37 25 17

Местное звездное время каждого наблюдения и приведения координат Солнца к месту наблюдения (§ 1 гл. VII), выраженные в единицах шестого знака, таковы:

Июнь	Местное зв. вр.	ΔX	ΔY	ΔZ
16	$18^h 51^m,8$	−7	+30	−29
18	21 14,1	−25	+23	−26
21	21 4,3	−24	+24	−26

Придав эти поправки к взятым из эфемерид геоцентрическим координатам Солнца и вычислив направляющие косинусы, будем иметь следующие исходные данные для вычисления орбиты:

	t_1	t	t_2
λ	+0,782 03	+0,742 15	+0,691 46
μ	+0,372 62	+0,381 54	+0,390 64
ν	+0,499 60	+0,551 06	+0,607 67
X	+0,085 427	+0,044 017	−0,006 496
Y	+0,928 905	+0,931 489	+0,932 506
Z	+0,402 916	+0,404 045	+0,404 487

Так как в настоящем случае

$$\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2 = +0,026\,094; \quad \lambda\nu_2 - \nu\lambda_2 = +0,069\,946;$$
$$\mu\nu_2 - \nu\mu_2 = +0,016\,584,$$

то берем второе уравнение из числа указанных в § 4 и представляем его в таком виде:

$$\rho_2 = 0,86019\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + 3,6021\frac{n_1}{n_2} - 3,9403\frac{1}{n_2} + 4,3429. \qquad \text{(A)}$$

Приготовим формулы для вычисления r_1, r_2 и s:

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= (\rho_1 - 0{,}614\,23)^2 + 0{,}655\,22, \\ r_2^2 &= (\rho_2 - 0{,}605\,58)^2 + 0{,}666\,50, \\ s^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 1{,}088\,94\rho_1 + 1{,}333\,55\rho_2 - 1{,}979\,79\rho_1\rho_2 - 2{,}05726. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{B})$$

Первое приближение

$$t_2 - t = 2^d{,}9850,$$
$$t - t_1 = 2{,}4503, \quad \frac{n_1}{n_2} = 1{,}2182; \quad \frac{1}{n_2} = 2{,}2182,$$
$$t_2 - t_1 = 5{,}4353,$$
$$\rho_2 = 1{,}0479\rho_1 - 0{,}0094, \qquad (\mathrm{A}')$$
$$(2\tau)^2 = 0{,}034\,970.$$

ρ_1	1	0,8	1,02
ρ_2	1,0385	0,8289	1,0595
$\rho_1 + C_1$	0,385 77	0,185 77	0,405 77
$\rho_2 + C_2$	0,432 92	0,223 32	0,453 92
r_1^2	0,804 04	0,689 73	0,819 87
r_2^2	0,853 92	0,716 37	0,872 54
s^2	0,018 52	0,012 53	0,019 24
r_1	0,896 68	0,830 50	0,905 47
r_2	0,924 68	0,846 39	0,934 10
$r_1 + r_2$	1,820 76	1,676 89	1,839 57
$(r_1 + r_2)^2$	3,315 17	2,811 95	3,384 02
c	0,005 587	0,004 456	0,005 683
θ_0	1,000 47	1,000 37	1,000 47
$\theta_0 (2\tau)^2$	0,034 99	0,034 98	0,034 99
$s^2 (r_1 + r_2)$	0,033 72	0,021 01	0,035 37
$f(\rho_1)$	+0,001 27	+0,013 97	−0,000 38

Два первых значения ρ_1 взяты наудачу. Третье вычислено так:

$$\rho_1 = 1 + 0{,}2\,\frac{0{,}00127}{0{,}01270} = 1{,}02.$$

Дальнейшее уточнение ρ_1 нецелесообразно — лучше перейти ко второму приближению.

Второе приближение

$$-L\rho_1 = -0{,}0059, \quad t_1^0 = 16{,}5247, \quad \tau_1 = 0{,}051\,347,$$
$$-L\rho = -0{,}0060, \quad t^0 = 18{,}9749, \quad \tau_2 = 0{,}042\,149,$$
$$-L\rho_2 = -0{,}0061, \quad t_2^0 = 21{,}9598, \quad \tau = 0{,}093\,495,$$
$$(2\tau)^2 = 0{,}034\,965.$$

Формулы (B) в § 4 дают

$$\frac{n_1}{n_2} = 1{,}21803, \quad \frac{1}{n_2} = 2{,}214\,69.$$

Сообразно с этим во втором приближении ρ_2 через ρ_1 выражается так:

$$\rho_2 = 1{,}0477\rho_1 + 0{,}0038. \tag{A''}$$

Повторяем вычисление геоцентрических расстояний (схема вычисления та же, что и в первом приближении, поэтому приводим ее ниже в сокращенном виде).

После того как сделана первая проба $\rho_1 = 1{,}02$, новое значение ρ_1 находим, исходя из предположения, что отношение изме нений ρ_1 и $f(\rho_1)$ имеет ту же величину, что и в первом приближении, т. е.

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta f} = \frac{1{,}02 - 1{,}00}{-0{,}000\,38 - 0{,}001\,27} = -12{,}1.$$

Это дает

$$\rho_1 = 1{,}02 - 0{,}006\,15 \times 12{,}1 = 0{,}9453.$$

Для третьей пробы берем

$$\rho_1 = 0{,}9453 + 0{,}000\,03 \times 12{,}1 = 0{,}9457.$$

Третья проба (которую можно было бы и не делать, ибо три единицы последнего знака лежат в пределах вероятного накопления ошибок вычисления) наглядно показывает, что геоцентрические расстояния находятся только с тремя надежными десятичными знаками. Несмотря на это, дальнейшие вычисления надо продолжать с пятью знаками, если мы хотим, чтобы полученные элементы представляли наблюдения с точностью до 1″.

ρ_1	1,02	0,9453	0,9457
ρ_2	1,0725	0,9942	0,9946
r_1^2	0,819 87	0,764 83	0,765 09
r_2^2	0,884 51	0,817 53	0,817 84
s^2	0,022 28	0,019 65	0,019 65
r_1	0,905 47	0,874 55	0,874 69
r_2	0,940 48	0,904 17	0,904 35
c	0,006 539	0,006 211	0,006 209
θ_0	1,000 55	1,000 52	1,000 52
$\theta_0 (2\tau)^2$	0,034 98	0,034 98	0,034 98
$s^2 (r_1 + r_2)$	0,041 13	0,034 95	0,034 96
$f(\rho_1)$	−0,006 15	+0,000 03	+0,000 02

Представление среднего места. Прежде всего находим гелиоцентрические координаты

x_1	$+0{,}654\,14$	x_2	$+0{,}694\,22$	x	$+0{,}673\,22$
y_1	$-0{,}576\,52$	y_2	$-0{,}543\,98$	y	$-0{,}562\,70$
z_1	$+0{,}069\,56$	z_2	$+0{,}199\,90$	z	$+0{,}128\,52$
r_1^2	$0{,}765\,11$	r_2^2	$0{,}817\,82$		

Посмотрим, как эти координаты представляют среднее наблюдение:

$\rho\cos\delta\cos\alpha$	$+0{,}717\,24$	α	$27^\circ{,}2113$	ρ	$0{,}966\,46$
$\rho\cos\delta\sin\alpha$	$+0{,}368\,79$	δ	$+33{,}4384$	λ	$+0{,}742\,13$
$\rho\sin\delta$	$+0{,}532\,56$	α	$27^\circ 12' 41''$	μ	$+0{,}381\,59$
$\operatorname{tg}\alpha$	$+0{,}514\,18$	δ	$+33^\circ 26' 18''$	ν	$+0{,}551\,04$
$\cos\alpha$	$+0{,}889\,33$	$\Delta\alpha$	$-12''$		
$\rho\cos\delta$	$+0{,}806\,49$	$\Delta\delta$	$+4''$		
$\operatorname{tg}\delta$	$+0{,}660\,34$				
$\cos\delta$	$+0{,}834\,48$				

Для того чтобы убедиться, что полученные разности $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ не являются результатом ошибок в вычислениях с полученными значениями λ, μ, ν, находим коэффициенты уравнения (A) § 4. Получим

$$\rho_2 = 0{,}86010\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + 3{,}6019\frac{n_1}{n_2} - 3{,}9401\frac{1}{n_2} + 4{,}3427.$$

Коэффициенты этого уравнения вполне совпадают с коэффициентами нашего исходного уравнения (A) в пределах точности пятизначного вычисления, ибо величина

$$K = \frac{0{,}060\,16}{0{,}069\,95} = 0{,}8600$$

имеет только четыре верных знака *). Пятый знак мы писали только ради однообразия.

Вычисление элементов

$\sum x_1x_2$	$+0{,}781\,64$	$(r_1r_0)^2$	$0{,}014\,761$	s	$0{,}140\,18$
				r_1	$0{,}874\,69$
σ	$+1{,}021\,60$	r_1r_0	$0{,}121\,51$	r_2	$0{,}904\,35$
x_0	$+0{,}025\,95$	$\operatorname{tg}2f$	$0{,}155\,46$	$s+r_1-r_2$	$0{,}110\,52$
y_0	$+0{,}044\,99$	$2f$	$8^\circ{,}8365$	$s-r_1+r_2$	$0{,}169\,84$
				Числ.	$0{,}018\,771$
z_0	$+0{,}128\,84$	f	$4{,}4182$		
				Знам.	$0{,}791\,03$
r_0^2	$0{,}019\,297$	r_0	$0{,}138\,91$		$0{,}023\,730$
				$2\sin f$	$0{,}154\,045$
				$\sin f$	$0{,}077\,02$
				f	$4^\circ{,}4173$

---

*) Отличие от предыдущего значения на 0,0001 объясняется тем, что при промежуточных операциях сохранялся «запасной» знак.

r_1/r_2	0,967 20	$\cos\frac{1}{2}v_1$	0,984 84
$\sqrt{r_1/r_2}$	0,983 46	$\cos\frac{1}{2}v_2$	0,968 55
$\cos f$	0,997 03	$\cos^2\frac{1}{2}v_1$	0,969 91
$\cos f-\sqrt{r_1/r_2}$	0,013 57	$\cos^2\frac{1}{2}v_2$	0,938 09
$\sin f$	0,077 04		
σ_1	+0,176 15	q	0,848 37 0,848 36
$\frac{1}{2}v_1$	9°,990	$\sqrt{q}$	0,921 06
v_1 v_2	+19,980 +28,816	$q\sqrt{q}$	0,781 39
$\frac{1}{2}v_2$	14,408	$2q$	1,696 73
σ_2	+0,256 91	$-B_1q\sqrt{q}$	−11,4328
B_1	14,6314	$-B_2q\sqrt{q}$	−16,8671
B_2	21,5860	T	5,0919 5,0927

$\sin v_1$	0,341 69	$\cos v_1$	0,939 81
$+r_1^{-1}\cos v_1$	+1,074 45	$+r_1^{-1}\sin v_1$	+0,390 64
$-r_0^{-1}\sin v_1$	−2,459 79	$+r_0^{-1}\cos v_1$	+6,765 61
P_x	+0,639 01	Q_x	+0,431 10
P_y	−0,730 11	Q_y	+0,079 17
P_z	−0,242 18	Q_z	+0,898 85

$\sin\varepsilon$	0,397 97	$\cos\varepsilon$	0,917 40
$\sin i\sin\omega$	+0,068 39	$\sin\Omega$	−0,800 32
$\sin i\cos\omega$	+0,793 10	$\cos\Omega$	+0,599 61
$\operatorname{tg}\omega$	0,086 23	Ω	306°,842
ω	+4°,9284		
$\cos\omega$	0,996 30	$\cos i$	0,605 25
$\sin\omega$	0,085 90	$\sin i$	0,796 05

Сопоставление полученных результатов

Элементы:

$$T=1909 \text{ июнь } 5{,}0923,$$

$$q=0{,}848\,37,$$

$$\left.\begin{aligned}\omega&=4°{,}928,\\ \Omega&=306°{,}842,\\ i&=52°{,}753\end{aligned}\right\}\ 1909{,}0.$$

Формулы для вычисления эфемериды:

$$\left.\begin{aligned} x &= +0{,}542\,12\,(1-\sigma^2)+0{,}731\,46\,\sigma, \\ y &= -0{,}619\,40\,(1-\sigma^2)+0{,}134\,33\,\sigma, \\ z &= -0{,}205\,46\,(1-\sigma^2)+1{,}525\,11\,\sigma \end{aligned}\right\}\ 1909{,}0.$$

Чтобы иметь окончательный контроль, следует еще вычислить по этим формулам гелиоцентрические координаты для момента среднего наблюдения.

Примечание I. В рассмотренном нами примере $D=+0{,}000\,058$; если принять во внимание обычную точность кометных наблюдений, то в этой величине и первую значащую цифру нельзя считать вполне надежной. Таким образом, вычисление орбиты общим методом, изложенным в предыдущей главе, не может здесь дать сколько-нибудь надежных результатов. Но для вычисления параболической орбиты взятые наблюдения оказались вполне пригодными.

Примечание II. В рассмотренном нами примере коэффициент m уравнения (A) оказался в первом приближении равным —0,0094, а во втором равным +0,0038. Это показывает, что мы только выиграли бы в точности, если бы в первом приближении положили $m=0$.

Дело в том, что коэффициент m, имеющий в первом приближении ошибку первого порядка, сам является величиной первого порядка. В этом легко убедиться при помощи выражений (2.3) и (2.4), если заметить, что

$$X_1 = X - \tau_2 X' + \ldots;\quad X_2 = X + \tau_1 X' + \ldots$$

и аналогично для двух других координат.

§ 6. Другой метод вычисления параболической орбиты

В методе вычисления параболической орбиты, изложенном в предыдущих параграфах, геоцентрические расстояния кометы находились при помощи уравнений (2.2) и (2.7). Первое из них имеет, как мы знаем, совершенно общий характер, а второе выражает условие параболичности орбиты.

Но чтобы выразить это условие, вместо уравнения Эйлера (2.7) можно взять [Субботин, 1959] соотношение

$$9\tau^2 = 2\left(r_1+r_2-2\sqrt{r_1r_2}\cos f\right)\left(r_1+r_2+\sqrt{r_1r_2}\cos f\right)^2, \tag{6.1}$$

полученное в § 8 гл. V. Оно в такой же мере специфично для параболического движения, как и уравнение Эйлера.

Положив

$$\varkappa = 2\sqrt{r_1r_2}\cos f;\quad R = r_1+r_2-\varkappa, \tag{6.2}$$

соотношение (6.1) можно представить в форме

$$18\tau^2 = R(2R+3\varkappa)^2. \tag{6.3}$$

Решение уравнения (2.2), т. е. уравнения

$$\rho_2 = M\rho_1 + m \tag{6.4}$$

совместно с уравнением (6.3) относительно ρ_1 и ρ_2 выполняется не менее удобно, чем решение уравнения (2.2) совместно с уравнением Эйлера, приведенным к виду (2.8). Но соотношение (6.3)