Формулы для вычисления эфемериды:

$$\left.\begin{aligned} x &= +0{,}542\,12\,(1-\sigma^2)+0{,}731\,46\,\sigma,\\ y &= -0{,}619\,40\,(1-\sigma^2)+0{,}134\,33\,\sigma,\\ z &= -0{,}205\,46\,(1-\sigma^2)+1{,}525\,11\,\sigma \end{aligned}\right\}\ 1909{,}0.$$

Чтобы иметь окончательный контроль, следует еще вычислить по этим формулам гелиоцентрические координаты для момента среднего наблюдения.

Примечание I. В рассмотренном нами примере $D=+0{,}000\,058$; если принять во внимание обычную точность кометных наблюдений, то в этой величине и первую значащую цифру нельзя считать вполне надежной. Таким образом, вычисление орбиты общим методом, изложенным в предыдущей главе, не может здесь дать сколько-нибудь надежных результатов. Но для вычисления параболической орбиты взятые наблюдения оказались вполне пригодными.

Примечание II. В рассмотренном нами примере коэффициент m уравнения (A) оказался в первом приближении равным $-0{,}0094$, а во втором равным $+0{,}0038$. Это показывает, что мы только выиграли бы в точности, если бы в первом приближении положили $m=0$.

Дело в том, что коэффициент m, имеющий в первом приближении ошибку первого порядка, сам является величиной первого порядка. В этом легко убедиться при помощи выражений (2.3) и (2.4), если заметить, что

$$X_1 = X-\tau_2 X' + \ldots;\quad X_2 = X+\tau_1 X' + \ldots$$

и аналогично для двух других координат.

§ 6. Другой метод вычисления параболической орбиты

В методе вычисления параболической орбиты, изложенном в предыдущих параграфах, геоцентрические расстояния кометы находились при помощи уравнений (2.2) и (2.7). Первое из них имеет, как мы знаем, совершенно общий характер, а второе выражает условие параболичности орбиты.

Но чтобы выразить это условие, вместо уравнения Эйлера (2.7) можно взять [Субботин, 1959] соотношение

$$9\tau^2 = 2\left(r_1+r_2-2\sqrt{r_1 r_2}\cos f\right)\left(r_1+r_2+\sqrt{r_1 r_2}\cos f\right)^2, \qquad (6.1)$$

полученное в § 8 гл. V. Оно в такой же мере специфично для параболического движения, как и уравнение Эйлера.

Положив

$$\varkappa = 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f;\quad R = r_1+r_2-\varkappa, \qquad (6.2)$$

соотношение (6.1) можно представить в форме

$$18\tau^2 = R(2R+3\varkappa)^2. \qquad (6.3)$$

Решение уравнения (2.2), т. е. уравнения

$$\rho_2 = M\rho_1 + m \qquad (6.4)$$

совместно с уравнением (6.3) относительно ρ_1 и ρ_2 выполняется не менее удобно, чем решение уравнения (2.2) совместно с уравнением Эйлера, приведенным к виду (2.8). Но соотношение (6.3) имеет то преимущество перед уравнением Эйлера, что не требует вспомогательных таблиц.

Для выражения величин (6.2) через ρ_1 и ρ_2 служат формулы

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1, & x_2 &= \lambda_2\rho_2 - X_2, \\ y_1 &= \mu_1\rho_1 - Y_1, & y_2 &= \mu_2\rho_2 - Y_2, \\ z_1 &= \nu_1\rho_1 - Z_1, & z_2 &= \nu_2\rho_2 - Z_2, \\ r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2. \\ & \varkappa^2 = 2(r_1r_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

Для вычисления r_1, r_2 можно, конечно, пользоваться выражениями (B), указанными в предыдущем параграфе, и аналогичным выражением

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = A\rho_1\rho_2 + B_1\rho_1 + B_2\rho_2 + D$$

для вычисления $\varkappa$. Однако в обычно встречающихся на практике случаях непосредственное применение формул (6.5) представляется более удобным.

Покажем, как изложенный метод применяется в примере, рассмотренном в предыдущем параграфе. Во втором приближении мы получили уравнение (6.4) в таком виде:

$$\rho_2 = 1{,}0477\,\rho_1 + 0{,}0038,$$

причем

$$\tau = 0{,}093\,495; \qquad 18\tau^2 = 0{,}15734.$$

Значения ρ_1 и ρ_2 в первых двух пробах берем те же, что и в предыдущем параграфе

ρ_1	1,02	0,9453	0,94584
ρ_2	1,07245	0,99419	0,99476
x_1	+0,71224	+0,65383	+0,65425
y_1	−0,54883	−0,57667	−0,57647
z_1	+0,10668	+0,06936	+0,06963
x_2	+0,74805	+0,69394	+0,69433
y_2	−0,51356	−0,54414	−0,54391
z_2	+0,24721	+0,19965	+0,20000
r_1^2	0,81988	0,76484	0,76521
r_2^2	0,88444	0,81750	0,81793
$\sum x_1x_2$	0,84102	0,78136	0,78174
r_1	0,90547	0,87455	0,87476
r_2	0,94045	0,90416	0,90439
r_1r_2	0,85155	0,79073	0,79113
$\varkappa^2$	3,38514	3,14418	3,14574
$\varkappa$	1,83988	1,77318	1,77362
R	0,00604	0,00553	0,00554
$2R+3\varkappa$	5,53172	5,33060	5,33194
$R(\ldots)^2$	0,1848	0,1571	0,1575
f	−0,0275	+0,0002	−0,0002

Через f обозначена разность между левой и правой частями равенства (6.3).

Значение ρ_1 для третьей пробы было найдено путем линейного интерполирования. Впрочем, в настоящем случае значение $\rho_1=0{,}9453$ можно считать окончательным, так как четвертый знак этой величины может быть найден лишь приблизительно. Третья проба хорошо демонстрирует это обстоятельство.

§ 7. Уравнение Ольберса

Исключение ρ из уравнений (2.1) дает два независимых уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} \rho_2 &= K\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + L_1\frac{n_1}{n_2} + L_2\frac{1}{n_2} + L_3, \\ \rho_2 &= K'\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + L_1'\frac{n_1}{n_2} + L_2'\frac{1}{n_2} + L_3'. \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Мы употребляли для нахождения геоцентрических расстояний только одно из этих уравнений, но можно воспользоваться любой комбинацией этих двух уравнений.

Исключим из уравнений (7.1) $1/n_2$. Это даст соотношение вида

$$\rho_2 = K''\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + L_1''\frac{n_1}{n_2} + L_3''.$$

Такое соотношение имеет место не только для кометы, но и для всяких трех точек, лежащих в плоскости, проходящей через центр Солнца, и на прямых, представляющих геоцентрические направления на комету. В частности, это соотношение справедливо и для Земли. Поэтому, обозначая через N_1 и N_2 отношения площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами Земли, получим

$$0 = L_1''\frac{N_1}{N_2} + L_3'',$$

ибо для Земли $\rho_1=\rho_2=0$.

Вычитая это равенство из предыдущего, получим

$$\rho_2 = K''\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + L_1''\left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2}\right).$$

Но легко видеть (§ 2 гл. VIII), что

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{\tau(\tau_2-\tau_1)}{6r^3} + \ldots\right], \tag{7.2}$$

и аналогично

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{\tau(\tau_2-\tau_1)}{6R^3} + \ldots\right].$$