Через f обозначена разность между левой и правой частями равенства (6.3).

Значение ρ_1 для третьей пробы было найдено путем линейного интерполирования. Впрочем, в настоящем случае значение $\rho_1=0{,}9453$ можно считать окончательным, так как четвертый знак этой величины может быть найден лишь приблизительно. Третья проба хорошо демонстрирует это обстоятельство.

§ 7. Уравнение Ольберса

Исключение ρ из уравнений (2.1) дает два независимых уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} \rho_2 &= K\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + L_1\frac{n_1}{n_2} + L_2\frac{1}{n_2} + L_3, \\ \rho_2 &= K'\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + L_1'\frac{n_1}{n_2} + L_2'\frac{1}{n_2} + L_3'. \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Мы употребляли для нахождения геоцентрических расстояний только одно из этих уравнений, но можно воспользоваться любой комбинацией этих двух уравнений.

Исключим из уравнений (7.1) $1/n_2$. Это даст соотношение вида

$$\rho_2 = K''\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + L_1''\frac{n_1}{n_2} + L_3''.$$

Такое соотношение имеет место не только для кометы, но и для всяких трех точек, лежащих в плоскости, проходящей через центр Солнца, и на прямых, представляющих геоцентрические направления на комету. В частности, это соотношение справедливо и для Земли. Поэтому, обозначая через N_1 и N_2 отношения площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами Земли, получим

$$0 = L_1''\frac{N_1}{N_2} + L_3'',$$

ибо для Земли $\rho_1=\rho_2=0$.

Вычитая это равенство из предыдущего, получим

$$\rho_2 = K''\frac{n_1}{n_2}\rho_1 + L_1''\left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2}\right).$$

Но легко видеть (§ 2 гл. VIII), что

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{\tau(\tau_2-\tau_1)}{6r^3} + \ldots\right], \tag{7.2}$$

и аналогично

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 + \frac{\tau(\tau_2-\tau_1)}{6R^3} + \ldots\right].$$

Таким образом, делая ошибку второго порядка относительно промежутков времени между наблюдениями, мы можем положить

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

Это дает уравнение

$$\rho_2=M\rho_1, \quad \text{где} \quad M=K''\frac{\tau_1}{\tau_2}. \tag{7.3}$$

Уравнение (7.3) введено в употребление Ольберсом (1797) и носит его имя.

В общем случае это уравнение имеет, так же как и каждое из уравнений (7.1), если в них положить

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{\tau_1}{\tau_2}, \qquad \frac{1}{n_2}=\frac{\tau}{\tau_2},$$

ошибку первого порядка, поскольку порядок величин L_1, L_1', L_2, L_2' и L_2'' равен —1. Но в случае равных интервалов времени уравнение (7.3) имеет, как легко видеть, ошибку второго порядка. В самом деле, формула (7.2) показывает, что отбрасываемая в уравнении Ольберса величина первого порядка, равная

$$\frac{\tau_1\tau(\tau_2-\tau_1)}{6\tau_2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)L_1'',$$

в случае $\tau_2=\tau_1$ обращается в нуль.

Условию равенства интервалов времени между наблюдениями почти всегда можно удовлетворить, так как кометы в первые дни после открытия наблюдаются обычно весьма усердно.

Таким образом, уравнение Ольберса уже в первом приближении может дать такую точность, которая является во многих случаях вполне достаточной при вычислении эфемериды, обеспечивающей продолжение наблюдений.

Недостатком уравнения (7.3) является то, что коэффициент K'' вычисляется вообще с несколько бо́льшей потерей точности, нежели коэффициенты K и K' уравнений (7.1); иногда потеря точности может быть столь значительной, что K'' становится практически неопределенным. В то же время для коэффициента K мы всегда можем выбрать наиболее подходящую из величин

$$-\frac{\lambda\mu_1-\lambda_1\mu}{\lambda\mu_2-\lambda_2\mu}; \quad -\frac{\lambda\nu_1-\lambda_1\nu}{\lambda\nu_2-\lambda_2\nu}; \quad -\frac{\mu\nu_1-\mu_1\nu}{\mu\nu_2-\mu_2\nu}. \tag{7.4}$$

Если бы знаменатели всех этих трех дробей оказались слишком близкими к нулю, то можно было бы воспользоваться уравнением вида

$$\rho_1=K^{-1}\rho_2+l.$$

Изложенный в §§ 2 и 3 метод становится неприменимым только в том случае, когда числители и знаменатели всех дробей (7.4) равны нулю. Но, как легко видеть (см. § 11, гл. VIII), в этом случае все три наблюденных положения кометы совпадали бы. Такой случай, или хотя бы близкий к нему, не может иметь места в действительности.

§ 8. О решении основной системы уравнений

Вычисление параболической орбиты основано, как мы видели, на решении системы уравнений (2.2), (2.5), (2.6) и (2.7) относительно ρ_1. Для этого приходится решать тем или иным интерполяционным методом уравнение

$$f(\rho_1)=0, \tag{8.1}$$

левую часть которого мы легко можем вычислить для любого значения ρ_1 (см. § 4).

Построение графика функции $f(\rho_1)$ в интересующей нас области изменения ρ_1 позволяет судить и о числе корней уравнения (8.1) и о точности, с которой эти корни могут быть найдены. Эта точность будет тем меньше, чем ближе к нулю тот угол, под которым кривая, представляющая функцию $f(\rho_1)$, пересекает ось абсцисс.

В подавляющем большинстве случаев уравнение (8.1) имеет только один положительный корень, но в некоторых, правда, весьма редких, случаях это уравнение имеет три положительных подходящих по величине корня. Сообразно с этим получаются три параболические орбиты, одинаково удовлетворительно представляющие три наблюдения, употребленные для вычисления орбиты. Только представление четвертого наблюдения позволяет в подобных случаях узнать, по какой из полученных (существенно различных) орбит движется комета. Такой случай впервые встретился для кометы 1882 II, а затем — для кометы 1910 I, особенно привлекшей внимание к возможности получения нескольких параболических орбит, одинаково хорошо удовлетворяющих трем наблюдениям кометы.

Для исследования вопроса о числе положительных корней уравнения (8.1) это уравнение заменяют приближенным уравнением, указанным еще Лежандром [1806].

Чтобы получить уравнение Лежандра, в уравнении Эйлера, приведенном к виду (2.8), положим

$$\theta_0=1, \quad r_1+r_2=2r.$$

Это даст

$$rs^2=2\tau^2, \tag{8.2}$$