Изложенный в §§ 2 и 3 метод становится неприменимым только в том случае, когда числители и знаменатели всех дробей (7.4) равны нулю. Но, как легко видеть (см. § 11, гл. VIII), в этом случае все три наблюденных положения кометы совпадали бы. Такой случай, или хотя бы близкий к нему, не может иметь места в действительности.

§ 8. О решении основной системы уравнений

Вычисление параболической орбиты основано, как мы видели, на решении системы уравнений (2.2), (2.5), (2.6) и (2.7) относительно ρ_1. Для этого приходится решать тем или иным интерполяционным методом уравнение

$$f(\rho_1) = 0, \tag{8.1}$$

левую часть которого мы легко можем вычислить для любого значения ρ_1 (см. § 4).

Построение графика функции $f(\rho_1)$ в интересующей нас области изменения ρ_1 позволяет судить и о числе корней уравнения (8.1) и о точности, с которой эти корни могут быть найдены. Эта точность будет тем меньше, чем ближе к нулю тот угол, под которым кривая, представляющая функцию $f(\rho_1)$, пересекает ось абсцисс.

В подавляющем большинстве случаев уравнение (8.1) имеет только один положительный корень, но в некоторых, правда, весьма редких, случаях это уравнение имеет три положительных подходящих по величине корня. Сообразно с этим получаются три параболические орбиты, одинаково удовлетворительно представляющие три наблюдения, употребленные для вычисления орбиты. Только представление четвертого наблюдения позволяет в подобных случаях узнать, по какой из полученных (существенно различных) орбит движется комета. Такой случай впервые встретился для кометы 1882 II, а затем — для кометы 1910 I, особенно привлекшей внимание к возможности получения нескольких параболических орбит, одинаково хорошо удовлетворяющих трем наблюдениям кометы.

Для исследования вопроса о числе положительных корней уравнения (8.1) это уравнение заменяют приближенным уравнением, указанным еще Лежандром [1806].

Чтобы получить уравнение Лежандра, в уравнении Эйлера, приведенном к виду (2.8), положим

$$\theta_0 = 1, \quad r_1 + r_2 = 2r.$$

Это даст

$$rs^2 = 2\tau^2, \tag{8.2}$$

где

$$r^2 = (\rho + C)^2 + S^2, \tag{8.3}$$

$$C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z); \quad S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - C^2.$$

Что же касается s^2, то на основании (2.5) и (2.6) имеем

$$s^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - E\rho_1\rho_2 + 2F_1\rho_1 + 2F_2\rho_2 + H, \tag{8.4}$$

если положить

$$E = 2(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2);$$

$$F_1 = \lambda_1(X_2 - X_1) + \mu_1(Y_2 - Y_1) + \nu_1(Z_2 - Z_1),$$

$$G = 2(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2);$$

$$F_2 = \lambda_2(X_1 - X_2) + \mu_2(Y_1 - Y_2) + \nu_2(Z_1 - Z_2),$$

$$H = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - G.$$

С тою же точностью, какая была принята в соотношении (8.2), мы можем величину m в уравнении (2.2) взять равной нулю и положить

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\rho.$$

Тогда будем иметь

$$\rho_1 = \frac{2\rho}{1+M}, \quad \rho_2 = \frac{2M\rho}{1+M}$$

и равенство (8.4) можно будет написать так:

$$s^2 = [(\rho + \Gamma)^2 + \Sigma^2]\,\frac{4(1 - EM + M^2)}{(1+M)^2},$$

где

$$2\Gamma = \frac{(1+M)(F_1 + F_2M)}{1 - EM + M^2}; \quad 4\Sigma^2 = \frac{H(1+M)^2}{1 - EM + M^2} - 4\Gamma^2.$$

Таким образом, уравнение (8.2) окончательно принимает форму

$$r\sigma^2 = c^2, \tag{8.5}$$

где

$$\sigma^2 = (\rho + \Gamma)^2 + \Sigma^2; \quad c^2 = \frac{\tau^2(1+M)^2}{2(1 - EM + M^2)},$$

а r дается равенством (8.3).

Уравнение (8.5) было использовано Лежандром для нахождения ρ. Подробная дискуссия этого уравнения, выполненная Т. Оппольцером [1882] и рядом других авторов, показала, что это уравнение имеет один либо три положительных корня. Критерии для различения этих случаев слишком сложны и применять их при вычислении орбит было бы нецелесообразно. Но они подтверждают, что случай трех положительных корней является исключительно редким и что этот случай к тому же всегда связан с малой точностью получаемых результатов. А это уже само по себе делает необходимым привлечение дальнейших наблюдений.

Т. Банахевич [1928] указал следующий графический прием для нахождения положительных корней уравнения (8.5). Взяв прямоугольную систему координат, построим точки $A(-C, S)$ и $B(-\Gamma, \Sigma)$. Решение уравнения (8.5) приводится к нахождению на оси абсцисс такой точки $P(\rho, 0)$, для которой расстояния $AP=r$ и $BP=\sigma$ удовлетворяют соотношению (8.5). При помощи проб легко получить все положения точки P, удовлетворяющие этому условию.

Зная достаточно приближенное значение корня уравнения (8.5), легко получить со всею нужной точностью соответствующий корень уравнения (8.1).

§ 9. Формулы Банахевича для вычисления элементов орбиты

Для вычисления элементов орбиты по положениям кометы $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, соответствующим двум моментам, t_1 и t_2, вместо формул, указанных в § 4, можно употребить нижеследующие формулы, предложенные Т. Банахевичем [1932].

Прежде всего вычисляем радиусы-векторы и хорду $P_1P_2=s$:

$$r_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2; \quad r_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,$$

$$s^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

Затем находим вспомогательные углы:

$$\sin\beta=\frac{r_2-r_1}{s}; \quad \sin\gamma=\frac{s}{r_1+r_2}. \tag{9.1}$$

Обозначая через σ_1 и σ_2 значения параболического параметра, соответствующие моментам t_1 и t_2, получим

$$r_1=q(1+\sigma_1^2); \quad r_2=q(1+\sigma_2^2).$$

Так как орбитальные координаты точек P_1 и P_2 равны

$$\xi_1=q(1-\sigma_1^2); \quad \eta_1=2q\sigma_1; \quad \xi_2=q(1-\sigma_2^2); \quad \eta_2=2q\sigma_2, \tag{9.2}$$

то

$$s^2=(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2=q^2(\sigma_2-\sigma_1)^2[(\sigma_1+\sigma_2)^2+4].$$

Следовательно,

$$\sin\beta=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_2)^2+4}}, \qquad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_2)^2+4}},$$

$$\sin\gamma=\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{(\sigma_1+\sigma_2)^2+4}}{2+\sigma_1^2+\sigma_2^2}, \quad \cos\gamma=\frac{2+2\sigma_1\sigma_2}{2+\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$