связан с малой точностью получаемых результатов. А это уже само по себе делает необходимым привлечение дальнейших наблюдений.

Т. Банахевич [1928] указал следующий графический прием для нахождения положительных корней уравнения (8.5). Взяв прямоугольную систему координат, построим точки $A(-C, S)$ и $B(-\Gamma, \Sigma)$. Решение уравнения (8.5) приводится к нахождению на оси абсцисс такой точки $P(\rho, 0)$, для которой расстояния $AP=r$ и $BP=\sigma$ удовлетворяют соотношению (8.5). При помощи проб легко получить все положения точки P, удовлетворяющие этому условию.

Зная достаточно приближенное значение корня уравнения (8.5), легко получить со всею нужной точностью соответствующий корень уравнения (8.1).

§ 9. Формулы Банахевича для вычисления элементов орбиты

Для вычисления элементов орбиты по положениям кометы $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, соответствующим двум моментам, t_1 и t_2, вместо формул, указанных в § 4, можно употребить нижеследующие формулы, предложенные Т. Банахевичем [1932].

Прежде всего вычисляем радиусы-векторы и хорду $P_1P_2=s$:

$$r_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2; \quad r_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,$$

$$s^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

Затем находим вспомогательные углы:

$$\sin\beta=\frac{r_2-r_1}{s}; \quad \sin\gamma=\frac{s}{r_1+r_2}. \tag{9.1}$$

Обозначая через σ_1 и σ_2 значения параболического параметра, соответствующие моментам t_1 и t_2, получим

$$r_1=q(1+\sigma_1^2); \quad r_2=q(1+\sigma_2^2).$$

Так как орбитальные координаты точек P_1 и P_2 равны

$$\xi_1=q(1-\sigma_1^2); \quad \eta_1=2q\sigma_1; \quad \xi_2=q(1-\sigma_2^2); \quad \eta_2=2q\sigma_2, \tag{9.2}$$

то

$$s^2=(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2=q^2(\sigma_2-\sigma_1)^2[(\sigma_1+\sigma_2)^2+4].$$

Следовательно,

$$\sin\beta=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_2)^2+4}}, \qquad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{(\sigma_1+\sigma_2)^2+4}},$$

$$\sin\gamma=\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{(\sigma_1+\sigma_2)^2+4}}{2+\sigma_1^2+\sigma_2^2}, \quad \cos\gamma=\frac{2+2\sigma_1\sigma_2}{2+\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_1) &= \operatorname{tg}\beta, \\ \frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_1) &= \sec\beta \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

Итак, формулы (9.1) и (9.3) дают σ_1 и σ_2. Затем находим перигельное расстояние:

$$q = r_1/(1+\sigma_1^2) = r_2/(1+\sigma_2^2) \tag{9.4}$$

и время прохождения через перигелий:

$$\left.\begin{aligned} B_1 = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\sigma_1+\frac{1}{3}\sigma_1^3\right); \quad B_2 = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\sigma_2+\frac{1}{3}\sigma_2^3\right), \\ T = t_1 - q^{3/2}B_1 = t_2 - q^{3/2}B_2. \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Для вычисления B_1 и B_2 служит таблица V.

Обозначим через H основание перпендикуляра, опущенного из фокуса S на прямую P_1P_2, и рассмотрим три вектора:

$$SP_1 = \boldsymbol{r}_1, \quad SP_2 = \boldsymbol{r}_2, \quad SH = \boldsymbol{H}.$$

Очевидно,

$$\boldsymbol{H} = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2. \tag{9.6}$$

Чтобы найти величины m_1 и m_2, связанные соотношением

$$m_1 + m_2 = 1,$$

умножим равенство (9.6) скалярно на вектор

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1.$$

Замечая, что

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{H} = 0, \quad \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 - s^2),$$

получим

$$m_1 = \frac{1}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2s^2}; \quad m_2 = \frac{1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2s^2}.$$

Если еще учесть (9.1), равенство (9.6) принимает вид

$$2\boldsymbol{H} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 - (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\sin\beta\operatorname{cosec}\gamma. \tag{9.7}$$

Обозначим через H_ξ, H_η проекции высоты SH на орбитальные координатные оси. Пользуясь выражениями (9.2) для проекций векторов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ на эти оси, легко убедиться, что

$$\left.\begin{aligned} 2H_\xi &= (r_1+r_2)\cos\gamma\cos^2\beta, \\ 2H_\eta &= (r_1+r_2)\cos\gamma\cos\beta\sin\beta, \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

откуда

$$2H = (r_1 + r_2)\cos\gamma\cos\beta. \tag{9.9}$$

Для вектора $\boldsymbol{s}$, перпендикулярного к $\boldsymbol{H}$, очевидно, имеем

$$s_\xi = - s \sin\beta; \quad s_\eta = + s\cos\beta. \tag{9.10}$$

Переходя теперь, пользуясь векторными элементами $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, к компонентам $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{s}$ по экваториальным осям координат, получим

$$H_x = H_\xi P_x + H_\eta Q_x; \ \ldots,$$
$$s_x = s_\xi P_x + s_\eta Q_x; \ \ldots$$

Отсюда, учитывая (9.8), (9.9) и (9.10), будем иметь

$$P_x = \frac{H_x}{H}\cos\beta - \frac{s_x}{s}\sin\beta; \quad Q_x = \frac{H_x}{H}\sin\beta + \frac{s_x}{s}\cos\beta,$$

. . . .

Так как

$$2H_x = x_1 + x_2 - (x_2 - x_1)\sin\beta\,\mathrm{cosec}\,\gamma; \quad s_x = x_2 - x_1; \ \ldots,$$

то окончательные формулы, служащие для вычисления векторных элементов, можно представить следующим образом:

$$A = [(r_1 + r_2)\cos\gamma]^{-1}; \quad B = A\,\mathrm{tg}\,\beta;$$
$$C = s^{-1}(\sec\gamma\sin\beta + \sin\beta),$$
$$D = s^{-1}(\sec\gamma\sin\beta - \cos\beta),$$
$$\begin{Vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 + x_2 & x_1 - x_2 \\ y_1 + y_2 & y_1 - y_2 \\ z_1 + z_2 & z_1 - z_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}.$$

В заключение укажем еще формулу

$$\sqrt{2q} = \sqrt{r_1 + r_2}\cos\beta\cos\frac{1}{2}\gamma,$$

которая может иногда оказаться полезной.