ГЛАВА X

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ

§ 1. Вычисление орбиты по четырем наблюдениям

Мы уже видели (§ 11 гл. VIII), что в том случае, когда вновь открытое светило движется в плоскости, образующей небольшой угол с плоскостью эклиптики, орбиту приходится вычислять по четырем наблюдениям. Чтобы узнать, имеет ли место этот случай, достаточно сопоставить склонения светила со склонениями Солнца для тех же прямых восхождений. Вычисление орбиты по четырем наблюдениям следует рекомендовать и в тех случаях, когда нельзя воспользоваться тремя наблюдениями, разделенными приблизительно равными промежутками времени. Употребление четырех наблюдений вместо трех существенно увеличивает во всех таких случаях точность получаемой орбиты, между тем как вычислительная работа увеличивается лишь немного *).

Обозначим через t_1, t, t', t_2 (где $t_1 < t < t' < t_2$) моменты четырех выбранных наблюдений и такими же индексами будем отмечать соответствующие этим моментам величины.

Связь между геоцентрическими и гелиоцентрическими координатами светила дается равенствами (сохраняем обозначения двух предыдущих глав)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1\rho_1 - X_1;\ x = \lambda\rho - X;\ x' = \lambda'\rho' - X';\ x_2 = \lambda_2\rho_2 - X_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (1.1)$$

Условие нахождения трех точек $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x,\ y,\ z)$, $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ в плоскости, проходящей через начало координат,

*) Из работ, в которых излагается определение орбит по четырем наблюдениям, укажем трактат Баушингера [1928], а также статью Фогеля [1895]. *(Прим. ред.)*

выражается равенствами (§ 2 гл. VIII)

$$n_1x_1 - x + n_2x_2 = 0,$$
$$n_1y_1 - y + n_2y_2 = 0,$$
$$n_1z_1 - z + n_2z_2 = 0.$$

Подставив сюда выражения (1.1), получим

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 n_1\lambda_1 - \rho\lambda + \rho_2 n_2\lambda_2 &= n_1X_1 - X + n_2X_2,\\ \rho_1 n_1\mu_1 - \rho\mu + \rho_2 n_2\mu_2 &= n_1Y_1 - Y + n_2Y_2,\\ \rho_1 n_1\nu_1 - \rho\nu + \rho_2 n_2\nu_2 &= n_1Z_1 - Z + n_2Z_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Исключение из этих уравнений ρ дает следующие зависимости между ρ_1 и ρ_2:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda\mu_2 - \lambda_2\mu)\, n_2\rho_2 &= -(\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu)\, n_1\rho_1 - (\lambda Y - \mu X) +\\ &\qquad + (\lambda Y_1 - \mu X_1)\, n_1 + (\lambda Y_2 - \mu X_2)\, n_2;\\ (\lambda\nu_2 - \lambda_2\nu)\, n_2\rho_2 &= -(\lambda\nu_1 - \lambda_1\nu)\, n_1\rho_1 - (\lambda Z - \nu X) +\\ &\qquad + (\lambda Z_1 - \nu X_1)\, n_1 + (\lambda Z_2 - \nu X_2)\, n_2;\\ (\mu\nu_2 - \mu_2\nu)\, n_2\rho_2 &= -(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\, n_1\rho_1 - (\mu Z - \nu Y) +\\ &\qquad + (\mu Z_1 - \nu Y_1)\, n_1 + (\mu Z_2 - \nu Y_2)\, n_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Из уравнений (1.3) выбираем то, в котором абсолютная величина левой части наибольшая, и представляем его в форме

$$\rho_2 = M\rho_1 + m, \tag{1.4}$$

где

$$M = K\frac{n_1}{n_2}; \quad m = L_1\frac{n_1}{n_2} + L_2\frac{1}{n_2} + L_3. \tag{1.5}$$

Заметим, что вместо вычисления K, L_1, L_2, L_3 при помощи выражений, даваемых равенствами (1.3), часто предпочитают выполнять исключение ρ из (1.2) численно.

Точно так же условие нахождения в одной плоскости начала координат и положений светила в моменты t_1, t', t_2 приводит к уравнениям, получающимся из (1.3) заменой (λ, μ, ν), (X, Y, Z) на (λ', μ', ν'), (X', Y', Z'). Из этих уравнений выбираем опять то, в котором абсолютная величина левой части самая большая, и представляем его в форме

$$\rho_2 = M'\rho_1 + m', \tag{1.6}$$

где

$$M' = K'\frac{n_1'}{n_2'}; \quad m' = L_1'\frac{n_1'}{n_2'} + L_2'\frac{1}{n_2'} + L_3'. \tag{1.7}$$

Чтобы воспользоваться уравнениями (1.4) и (1.6) для нахождения ρ_1 и ρ_2, нужно взять достаточно приближенные значения для n_1, n_2, n'_1, n'_2. Очевидно, здесь наиболее удобными являются формулы Оппольцера, выражающие отношения площадей треугольников через радиусы-векторы r_1 и r_2 двух крайних положений светила. Эти формулы дают (§ 3 гл. IX)

$$\left.\begin{aligned}\frac{n_1}{n_2} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} - \xi\left[\tau\tau_1\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1\right) - \tau_1^2\eta\right],\\ \frac{1}{n_2} &= \frac{\tau}{\tau_2} - \xi\left[\tau\tau_1\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right) - \tau_1\tau_2\eta\right],\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

где

$$\tau_1 = k(t_2 - t);\ \tau_2 = k(t - t_1);\ \tau = k(t_2 - t_1),$$

$$k = 0{,}017\,202\,099,\ \lg k = 8{,}235\,5814_{-10},$$

$$\xi = \frac{4}{3}(r_1 + r_2)^{-3};\ \eta = 3(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)^{-1}. \tag{1.9}$$

Выражения для n'_1/n'_2 и $1/n'_2$ получаются из (1.8) путем замены τ_1 и τ_2 через

$$\tau'_1 = k(t_2 - t');\ \tau'_2 = k(t' - t_1).$$

Подстановка выражений (1.8) и им аналогичных в равенства (1.5) и (1.7) дает

$$\left.\begin{aligned}M &= G + G_1\xi + G_2\xi\eta; & m &= H + H_1\xi + H_2\xi\eta,\\ M' &= G' + G'_1\xi + G'_2\xi\eta; & m' &= H' + H'_1\xi + H'_2\xi\eta.\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Эти равенства показывают, что уравнения (1.4), (1.6) содержат, в пределах принятой нами точности, еще не известные ξ и η. Но соотношения (1.1) дают

$$r_1^2 = (\rho_1 + C_1)^2 + S_1^2;\quad r_2^2 = (\rho_2 + C_2)^2 + S_2^2, \tag{1.11}$$

где положено

$$\begin{aligned}C_1 &= -(\lambda_1X_1 + \mu_1Y_1 + \nu_1Z_1); & C_2 &= -(\lambda_2X_2 + \mu_2Y_2 + \nu_2Z_2),\\ R_1^2 &= X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2; & R_2^2 &= X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2,\\ S_1^2 &= R_1^2 - C_1^2; & S_2^2 &= R_2^2 - C_2^2.\end{aligned}$$

Таким образом, присоединив к уравнениям (1.4), (1.6) еще равенства (1.9) и (1.11), мы получим систему шести уравнений с шестью неизвестными ρ_1, ρ_2, ξ, η, r_1, r_2.

Решение этой системы последовательными приближеииями выполняется очень просто.

Для малой планеты в первом приближении можно взять $r_1 = r_2 = 2{,}7$, что дает

$$\xi = 0{,}008,\qquad \eta = 0.$$

Вычислив с этими значениями коэффициенты (1.10) уравнений (1.4) и (1.6), имеем

$$\rho_1 = \frac{m' - m}{M - M'}; \quad \rho_2 = M\rho_1 + m = M'\rho_1 + m'.$$

Формулы (1.11) дадут новые значения r_1, r_2, что позволит получить более точные значения величин (1.9), а следовательно, и более точные значения ρ_1 и ρ_2. Этот процесс очень быстро сходится.

Для кометы исходные значения ξ, η можно найти при помощи той параболической орбиты, которая в таких случаях обычно имеется.

После нахождения ρ_1 и ρ_2 с двумя-тремя верными десятичными знаками следует исправить моменты наблюдений за аберрационное время и только после этого переходить к окончательному приближению.

Аберрационное время для двух крайних наблюдений равно

$$L\rho_1, \ L\rho_2 \ (L = 0^d,005\,7756).$$

Для двух промежуточных моментов его можно найти с достаточной точностью при помощи интерполирования:

$$L\rho = L\rho_1 + \frac{\tau_2}{\tau}(L\rho_2 - L\rho_1); \quad L\rho' = L\rho_1 + \frac{\tau_2'}{\tau}(L\rho_2 - L\rho_1).$$

Исправленные моменты наблюдений даются формулами

$$t_1^* = t_1 - L\rho_1; \ t^* = t - L\rho; \ t^{*\prime} = t' - L\rho'; \ t_2^* = t_2 - L\rho_2.$$

Получив окончательные значения ρ_1 и ρ_2, вычисляем гелиоцентрические координаты

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1; & x_2 &= \lambda_2\rho_2 - X_2, \\ y_1 &= \mu_1\rho_1 - Y_1; & y_2 &= \mu_2\rho_2 - Y_2, \\ z_1 &= \nu_1\rho_1 - Z_1; & z_2 &= \nu_2\rho_2 - Z_2, \end{aligned}$$

и переходим к нахождению элементов орбиты (§ 9, гл. V).

Для контроля всей проделанной работы следует при помощи вычисленной орбиты представить два средних наблюдения. Эти наблюдения не участвуют непосредственно в вычислении элементов, а употребляются только для нахождения ρ_1 и ρ_2. Поэтому представление их дает гораздо более глубокий контроль, нежели представление крайних наблюдений. Но здесь надо учитывать, что каждое из этих наблюдений было использовано для получения орбиты лишь частично, поскольку нами было взято только одно из уравнений (1.3) или им аналогичных для второго среднего момента. Поэтому, если вычисленные для среднего момента значения α и δ отличаются от наблюденных значений больше, чем это вызывается неизбежными округлениями, надо с вычисленными значениями α и δ найти коэффициенты K, L_1, ..., или K', L'_1, ..., взятого для вычислений уравнения (1.4) или (1.6). Если вычисления сделаны правильно, то новые значения этих коэффициентов должны совпадать с прежними, полученными при помощи наблюденных значений α и δ.

Если вычисленные значения α и δ хорошо воспроизводят исходные значения коэффициентов K, L_1, ..., K', L'_1, ..., но существенно отличаются от наблюденных значений, то это может быть либо следствием ошибок наблюдений, либо следствием недостаточной точности формул Оппольцера, употребленных для вычисления отношений площадей треугольников. Конечно, в подобном случае можно было бы выполнить еще одно приближение, взяв для n_1, n_2 n'_1, n'_2 значения, даваемые формулами Гаусса (§ 6 гл. VIII). Но это потребовало бы слишком длинных вычислений. Проще попробовать улучшить полученную орбиту способом вариации геоцентрических расстояний (§ 2 гл. X), что выгодно еще и в том отношении, что позволяет легко использовать дополнительные наблюдения.

§ 2. Пример вычисления орбиты по четырем наблюдениям

Возьмем следующие наблюдения планеты 1931 TU, полученные на Симеизской обсерватории:

1931		Всем. вр.	α (1931,0)	δ (1931,0)
Октябрь	10	$1^h04^m,5$	$2^h08^m49^s,07$	$+2°21'05'',3$
»	14	23 24,2	2 05 25,60	+1 55 16,4
Ноябрь	6	20 06,0	1 48 33,30	+0 21 05,2
»	12	20 23,5	1 44 41,62	+0 08 01,3

Сопоставление склонений планеты со склонениями Солнца, взятыми для тех же прямых восхождений, показывает, что планета движется в плоскости, образующей достаточно большой угол с плоскостью эклиптики. Но вследствие неудачного распределения наблюдений ожидать хороших результатов от орбиты, вычисленной по трем из этих наблюдений, не приходится. Целесообразнее вычислить орбиту по всем четырем наблюдениям.

Направляющие косинусы и координаты Солнца (топоцентрические) таковы:

	t_1	t	t'	t_2
λ	+0,845 440	+0,853 465	+0,889 888	+0,897 460
μ	+0,532 494	+0,520 072	+0,456 138	+0,441 089
ν	+0,041 029	+0,033 525	+0,006 134	+0,002 333
X	−0,961 058	−0,933 173	−0,719 582	−0,642 907
Y	−0,248 893	−0,322 551	−0,625 216	−0,690 256
Z	−0,107 973	−0,139 926	−0,271 206	−0,299 417