чем это вызывается неизбежными округлениями, надо с вычисленными значениями $\alpha$ и $\delta$ найти коэффициенты $K$, $L_1$, ..., или $K'$, $L_1'$, ..., взятого для вычислений уравнения (1.4) или (1.6). Если вычисления сделаны правильно, то новые значения этих коэффициентов должны совпадать с прежними, полученными при помощи наблюденных значений $\alpha$ и $\delta$.

Если вычисленные значения $\alpha$ и $\delta$ хорошо воспроизводят исходные значения коэффициентов $K$, $L_1$, ..., $K'$, $L_1'$, ..., но существенно отличаются от наблюденных значений, то это может быть либо следствием ошибок наблюдений, либо следствием недостаточной точности формул Оппольцера, употребленных для вычисления отношений площадей треугольников. Конечно, в подобном случае можно было бы выполнить еще одно приближение, взяв для $n_1$, $n_2$ $n_1'$, $n_2'$ значения, даваемые формулами Гаусса (§ 6 гл. VIII). Но это потребовало бы слишком длинных вычислений. Проще попробовать улучшить полученную орбиту способом вариации геоцентрических расстояний (§ 2 гл. X), что выгодно еще и в том отношении, что позволяет легко использовать дополнительные наблюдения.

## § 2. Пример вычисления орбиты по четырем наблюдениям

Возьмем следующие наблюдения планеты 1931 TU, полученные на Симеизской обсерватории:

| 1931 | | Всем. вр. | $\alpha$ (1931,0) | $\delta$ (1931,0) |
|---|---|---|---|---|
| Октябрь | 10 | $1^h04^m,5$ | $2^h08^m49^s,07$ | $+2°\,21'\,05'',3$ |
| » | 14 | 23 24,2 | 2 05 25,60 | +1 55 16,4 |
| Ноябрь | 6 | 20 06,0 | 1 48 33,30 | +0 21 05,2 |
| » | 12 | 20 23,5 | 1 44 41,62 | +0 08 01,3 |

Сопоставление склонений планеты со склонениями Солнца, взятыми для тех же прямых восхождений, показывает, что планета движется в плоскости, образующей достаточно большой угол с плоскостью эклиптики. Но вследствие неудачного распределения наблюдений ожидать хороших результатов от орбиты, вычисленной по трем из этих наблюдений, не приходится. Целесообразнее вычислить орбиту по всем четырем наблюдениям.

Направляющие косинусы и координаты Солнца (топоцентрические) таковы:

| | $t_1$ | $t$ | $t'$ | $t_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | +0,845 440 | +0,853 465 | +0,889 888 | +0,897 460 |
| $\mu$ | +0,532 494 | +0,520 072 | +0,456 138 | +0,441 089 |
| $\nu$ | +0,041 029 | +0,033 525 | +0,006 134 | +0,002 333 |
| $X$ | −0,961 058 | −0,933 173 | −0,719 582 | −0,642 907 |
| $Y$ | −0,248 893 | −0,322 551 | −0,625 216 | −0,690 256 |
| $Z$ | −0,107 973 | −0,139 926 | −0,271 206 | −0,299 417 |

Из числа уравнений (1.3) в данном случае для обоих средних наблюдений оказывается наиболее выгодным первое. Получаем следующие основные уравнения *):

$$\left.\begin{aligned}\rho_2&=0,163\,64\frac{n_1}{n_2}\rho_1-3,183\,05\frac{n_1}{n_2}+2,326\,18\frac{1}{n_2}+2,821\,48,\\ \rho_2&=5,237\,03\frac{n_1'}{n_2'}\rho_1-12,874\,75\frac{n_1'}{n_2'}-13,542\,92\frac{1}{n_2'}+19,054\,73.\end{aligned}\right\}\quad(2.1)$$

$$\left.\begin{aligned}r_1^2&=(\rho_1+0,949\,481)^2+0,095\,724,\\ r_2^2&=(\rho_2+0,882\,146)^2+0,201\,251.\end{aligned}\right\}\quad(2.2)$$

Переходим к вычислению приближенных значений $\rho_1$, $\rho_2$. Принимая $\xi=0,008$, $\eta=0$, при помощи формул (1.8), (1.5) и (1.7) находим

$$M=+0,9565,\qquad m=+0,1229,$$
$$M'=+1,1349,\qquad m'=-0,1933,$$

откуда

$$\rho_1=1,772,\qquad \rho_2=1,818.$$

Соответствующие значения

$$r_1=2,739,\qquad r_2=2,737$$

дают

$$\xi=0,00812,\qquad \eta=-0,0011.$$

Так как эти значения весьма близки к исходным, то нет надобности перевычислять $\rho_1$, $\rho_2$. Находим аберрационное время и исправленные моменты:

$$\begin{aligned}&L\rho_1=0,010\,22, && t_1^*=10,034\,57, && t_2^*-t^*=28,874\,28,\\ &L\rho=0,010\,26, && t^*=14,964\,88, && t^*-t_1^*=\ \ 4,930\,31,\\ &L\rho'=0,010\,44, && t'^*=37,827\,06, && t_2^*-t'^*=\ \ 6,012\,10,\\ &L\rho_2=0,010\,49, && t_2^*=43,839\,16, && t'^*-t_1^*=27,792\,49,\\ & && && \overline{t_2^*-t_1^*=33,804\,59.}\end{aligned}$$

С этими значениями исправленных за аберрацию промежутков времени вычисляем практически окончательные значения коэффициентов в формулах (1.8) и аналогичных

*) В некоторых случаях ради однообразия удерживаются заведомо нереальные цифры.

формулах для второго среднего наблюдения:

$$\begin{array}{rlrl}
\tau_1 & 0{,}496\,6983, & \tau_1' & 0{,}103\,4207,\\
\tau_2 & 0{,}084\,8117, & \tau_2' & 0{,}478\,0892,\\
\tau & 0{,}581\,5100, & \tau' & 0{,}581\,5099,\\
\tau_1/\tau_2 & 5{,}856\,483, & \tau_1'/\tau_2' & 0{,}216\,3209,\\
\tau/\tau_2 & 6{,}856\,482, & \tau'/\tau_2' & 1{,}216\,3209,\\
\tau_1\tau & 0{,}288\,8350, & \tau_1'\tau' & 0{,}060\,1402.
\end{array}$$

Таким образом, находим

$$\begin{aligned}
n_1/n_2 &= 5{,}856\,483 - \xi\,(1{,}402\,722 - 0{,}246\,71\eta),\\
1/n_2 &= 6{,}856\,482 - \xi\,(2{,}269\,227 - 0{,}042\,13\eta),\\
n_1'/n_2' &= 0{,}216\,3209 + \xi\,(0{,}047\,131 + 0{,}010\,70\eta),\\
1/n_2' &= 1{,}216\,3209 - \xi\,(0{,}133\,290 - 0{,}049\,44\eta).
\end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в уравнения (2.1) дает

$$\rho_2 = M\rho_1 + m; \quad \rho_2 = M'\rho_1 + m', \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned}
M &= +0{,}958\,35 - \xi\,(0{,}2295 - 0{,}040\eta),\\
m &= +0{,}129\,41 - \xi\,(0{,}8137 + 0{,}687\eta),\\
M' &= +1{,}132\,88 + \xi\,(0{,}2468 + 0{,}056\eta),\\
m' &= -0{,}20288 + \xi\,(1{,}1983 - 0{,}807\eta).
\end{aligned}$$

Теперь переходим к решению уравнений (2.2), (2.3) и

$$\xi = \frac{4}{3}(r_1 + r_2)^{-3}; \quad \eta = 3\,(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)^{-1}$$

относительно $\rho_1$, $\rho_2$, $r_1$, $r_2$, $\xi$, $\eta$. Решение этой системы легко выполняется при помощи итерации относительно неизвестных $\xi$ и $\eta$. Начинаем с тех значений, которые были получены в первом приближении:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | 0,008 12 | 0,008 127 | 0,008 130 |
| $\eta$ | —0,0011 | —0,001 147 | —0,001 152 |
| $M$ | 0,956 49 | 0,956 484 | 0,956 484 |
| $M'$ | 1,134 88 | 1,134 885 | 1,134 886 |
| $M-M'$ | —0,178 39 | —0,178 401 | —0,178 402 |
| $m$ | 0,122 81 | 0,122 803 | 0,122 801 |
| $m'$ | —0,193 15 | —0,193 134 | —0,193 130 |
| $m'-m$ | —0,315 96 | —0,315 937 | —0,315 931 |
| $\rho_1$ | 1,771 18 | 1,770 937 | 1,770 894 |
| $\rho_2$ | 1,816 93 | 1,816 676 | 1,816 633 |
| $r_1^2$ | 7,497 720 | 7,496 398 | |
| $r_2^2$ | 7,486 262 | 7,484 891 | |
| $r_1$ | 2,738 196 | 2,737 955 | |
| $r_2$ | 2,736 103 | 2,735 853 | |
| $r_2-r_1$ | —0,002 093 | —0,002 102 | |
| $r_1+r_2$ | 5,474 299 | 5,473 808 | |
| $(r_1+r_2)^{-1}$ | 0,182 672 | 0,182 688 | |
| $(r_1+r_2)^{-3}$ | 0,006 0956 | 0,006 0972 | |

Заметим, что можно было бы удовольствоваться значениями $\rho_1$ и $\rho_2$, полученными во втором столбце. К полной точности в решении рассматриваемой системы можно не стремиться, поскольку лежащие в основе формулы (1.8) являются лишь приближенными.

Получив значения $\rho_1$ и $\rho_2$, которые можно считать окончательными, вычисляем соответствующие им гелиоцентрические координаты и переходим к вычислению элементов орбиты, для чего служат способы, подробно изученные в гл. V.

## § 3. Вычисление круговой орбиты

Для вычисления орбиты малой планеты надо иметь по крайней мере три наблюдения, притом еще достаточно благоприятно расположенных. Однако и в том случае, когда имеются вообще только два наблюдения, или когда нельзя подобрать три наблюдения, подходящие для нахождения эллиптической орбиты, все же бывает возможно получить некоторые ценные сведения о движении планеты.

В такого рода случаях обычно вычисляют круговую орбиту. Хотя строго по круговой орбите не движется ни одна планета, тем не менее в подавляющем большинстве встречающихся на практике случаев круговая орбита представляет движение планеты в течение 1—2 месяцев с точностью, вполне достаточной для получения дальнейших наблюдений. Это объясняется как тем, что эксцентриситеты орбит малых планет чаще всего не велики (средняя величина эксцентриситета равна 0,15), так и тем, что малые планеты вследствие их слабости открываются преимущественно вблизи перигелия, т. е. в такой части орбиты, которая особенно хорошо может быть заменена дугой окружности.

Круговую орбиту вычисляют не только для получения эфемериды, обеспечивающей возможность получения дальнейших наблюдений. Если для вновь открытой планеты за всю оппозицию удалось получить только два наблюдения, то вычисление круговой орбиты, дающей обычно достаточно надежные значения элементов $\Omega$ и $i$, нередко позволяет отождествить эту планету с одной из открытых ранее и затем потерянных планет.

Круговая орбита определяется четырьмя элементами: помимо $\Omega$, $i$ и $a$ (радиус орбиты), нужно еще иметь аргумент широты $u_0$ для некоторого определенного момента $t_0$.

Пусть даны два наблюдения планеты: $t_1$, $\alpha_1$, $\delta_1$ и $t_2$, $\alpha_2$, $\delta_2$. Введя, как всегда, вместо прямых восхождений и склонений направляющие косинусы

$$\lambda_i = \cos\delta_i \cos\alpha_i; \quad \mu_i = \cos\delta_i \sin\alpha_i; \quad \nu_i = \sin\delta_i \quad (i = 1,\ 2)$$