Заметим, что можно было бы удовольствоваться значениями ρ_1 и ρ_2, полученными во втором столбце. К полной точности в решении рассматриваемой системы можно не стремиться, поскольку лежащие в основе формулы (1.8) являются лишь приближенными.

Получив значения ρ_1 и ρ_2, которые можно считать окончательными, вычисляем соответствующие им гелиоцентрические координаты и переходим к вычислению элементов орбиты, для чего служат способы, подробно изученные в гл. V.

§ 3. Вычисление круговой орбиты

Для вычисления орбиты малой планеты надо иметь по крайней мере три наблюдения, притом еще достаточно благоприятно расположенных. Однако и в том случае, когда имеются вообще только два наблюдения, или когда нельзя подобрать три наблюдения, подходящие для нахождения эллиптической орбиты, все же бывает возможно получить некоторые ценные сведения о движении планеты.

В такого рода случаях обычно вычисляют круговую орбиту. Хотя строго по круговой орбите не движется ни одна планета, тем не менее в подавляющем большинстве встречающихся на практике случаев круговая орбита представляет движение планеты в течение 1—2 месяцев с точностью, вполне достаточной для получения дальнейших наблюдений. Это объясняется как тем, что эксцентриситеты орбит малых планет чаще всего не велики (средняя величина эксцентриситета равна 0,15), так и тем, что малые планеты вследствие их слабости открываются преимущественно вблизи перигелия, т. е. в такой части орбиты, которая особенно хорошо может быть заменена дугой окружности.

Круговую орбиту вычисляют не только для получения эфемериды, обеспечивающей возможность получения дальнейших наблюдений. Если для вновь открытой планеты за всю оппозицию удалось получить только два наблюдения, то вычисление круговой орбиты, дающей обычно достаточно надежные значения элементов Ω и i, нередко позволяет отождествить эту планету с одной из открытых ранее и затем потерянных планет.

Круговая орбита определяется четырьмя элементами: помимо Ω, i и a (радиус орбиты), нужно еще иметь аргумент широты u_0 для некоторого определенного момента t_0.

Пусть даны два наблюдения планеты: t_1, α_1, δ_1 и t_2, α_2, δ_2. Введя, как всегда, вместо прямых восхождений и склонений направляющие косинусы

$$\lambda_i = \cos\delta_i \cos\alpha_i; \quad \mu_i = \cos\delta_i \sin\alpha_i; \quad \nu_i = \sin\delta_i \quad (i = 1,\ 2)$$

будем иметь для гелиоцентрических координат планеты выражения:

$$x_i = \lambda_i \rho_i - X_i;\quad y_i = \mu_i \rho_i - Y_i;\quad z_i = \nu_i \rho_i - Z_i, \tag{3.1}$$

где через X_i, Y_i, Z_i обозначены прямоугольные экваториальные координаты Солнца в момент t_i.

Так как согласно нашему предположению планета движется по окружности радиуса a, то

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = a^2,$$

или, на основании (3.1),

$$\rho_i^2 + 2C_i\rho_i + R_i^2 = a^2,$$

где

$$C_i = -(\lambda_i X_i + \mu_i Y_i + \nu_i Z_i);\quad R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2. \tag{3.2}$$

Таким образом, полагая

$$S_i^2 = R_i^2 - C_i^2, \tag{3.3}$$

будем иметь

$$\rho_i = \sqrt{a^2 - S_i^2} - C_i \qquad (i = 1,\ 2). \tag{3.4}$$

Положение планеты в орбите будем определять углом v, отсчитываемым от некоторой точки орбиты, которая будет фиксирована в дальнейшем. Обозначим значения этого угла в моменты наблюдений через v_1 и v_2. Дуга $v_2 - v_1 = 2f$ между радиусами-векторами планеты дается формулой

$$a^2 \cos 2f = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Поскольку дуга $2f$ обычно очень мала, эту формулу следует заменить такой:

$$\sin^2 f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2), \tag{3.5}$$

или же такой:

$$4a^2 \sin^2 f = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \tag{3.6}$$

Итак, взяв любое значение a, мы можем вычислить при помощи формул (3.2), (3.3) и (3.4) соответствующие значения геоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2, после чего формулы (3.1) и (3.5) дадут угол f. Это значение f, полученное чисто геометрическим путем, мы назовем г е о м е т р и ч е с к и м и обозначим через f_g.

С другой стороны, формулы эллиптического движения показывают, что движение по кругу происходит равномерно с угловой скоростью, равной $ka^{-3/2}$. Таким образом, должно иметь место равенство

$$v_2 - v_1 = ka^{-3/2}(t_2 - t_1).$$

Это дает для угла f значение

$$f_d = \frac{1}{2} k a^{-3/2} (t_2 - t_1); \quad \frac{1}{2} k = 0^\circ{,}492\,80, \tag{3.7}$$

которое мы назовем динамическим.

Круговая орбита, удовлетворяющая взятым наблюдениям, получится при том значении a, которое удовлетворяет уравнению

$$f(a^2) = 0, \tag{3.8}$$

где $f(a^2) = f_g - f_d$.

Решение уравнения (3.8), левая часть которого легко вычисляется для любого значения a^2, выполняется проще всего повторным линейным интерполированием. Вычисление выражения (3.7) облегчается применением таблицы XII.

После нахождения радиуса орбиты a вычисляем среднее суточное движение по формулам

$$n = 2f/(t_2 - t_1); \qquad n = ka^{-3/2} \qquad (k = 3548'',2)$$

(причем согласие этих значений служит хорошим контролем), и переходим к вычислению элементов, определяющих положение орбиты в пространстве. Так как у круговой орбиты нет перигелия, то за $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ примем векторы, направленные в те точки орбиты, в которых $v=0$ и $v=90^\circ$. Это дает ($A_x = aP_x$; $B_x = aQ_x, \ldots$)

$$x_1 = A_x \cos v_1 + B_x \sin v_1; \quad x_2 = A_x \cos v_2 + B_x \sin v_2$$

и аналогичные равенства для двух других координат. Таким образом,

$$\frac{1}{2}(x_2 + x_1) = A_x \cos \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \cos f + B_x \sin \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \cos f,$$

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = -A_x \sin \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \sin f + B_x \cos \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \sin f.$$

Условимся выбрать начало счета углов v так, чтобы было

$$\frac{1}{2}(v_2 + v_1) = 0,$$

т. е., иначе говоря, будем считать этот угол от радиуса вектора планеты, соответствующего моменту $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. Тогда для вычисления векторных элементов будем иметь следующие простые формулы:

$$\left.\begin{aligned} 2A_x &= (x_2 + x_1) \sec f; & 2B_x &= (x_2 - x_1) \operatorname{cosec} f, \\ 2A_y &= (y_2 + y_1) \sec f; & 2B_y &= (y_2 - y_1) \operatorname{cosec} f, \\ 2A_z &= (z_2 + z_1) \sec f; & 2B_z &= (z_2 - z_1) \operatorname{cosec} f. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Для контроля пользуемся, как всегда, соотношениями

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0;$$
$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = a^2; \quad B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = a^2.$$

Представление наблюдений

Для того чтобы вычислить α и δ, соответствующие моменту t, служат формулы

$$v = n(t - t_0),$$
$$\rho \cos\delta \cos\alpha = A_x \cos v + B_x \sin v + X,$$
$$\rho \cos\delta \sin\alpha = A_y \cos v + B_y \sin v + Y,$$
$$\rho \sin\delta = A_z \cos v + B_z \sin v + Z.$$

Вычисление эклиптических элементов

С точки зрения возможного отождествления вновь открытой планеты с уже известными представляет интерес вычисление элементов i, Ω, определяющих положение плоскости орбиты относительно эклиптики. Для этого служат формулы (1.10), (1.11) из § 1 гл. V, которые можно здесь написать так:

$$\left.\begin{aligned} a \sin i \sin\omega &= A_z \cos\varepsilon - A_y \sin\varepsilon, \\ a \sin i \cos\omega &= B_z \cos\varepsilon - B_y \sin\varepsilon, \\ a \sin\Omega &= (A_y \cos\omega - B_y \sin\omega) \sec\varepsilon, \\ a \cos\Omega &= A_x \cos\omega - B_x \sin\omega. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Здесь ω — расстояние от узла до той точки орбиты, от которой отсчитываются углы v. Таким образом, ω есть не что иное, как аргумент широты u_0 в момент t_0.

Примечание I. При вычислении круговой орбиты поправками за параллакс и за аберрацию обычно пренебрегают. Учет аберрации не требует, впрочем, сколько-нибудь заметного увеличения работы.

Примечание II. Практика вычисления круговых орбит показала, что уравнению (3.8) не всегда можно удовлетворить положительным значением a^2. Таким образом, два наблюдения малой планеты в некоторых случаях не могут быть представлены круговой орбитой.

Чтобы получить критерий, позволяющий непосредственно по наблюдениям судить о возможности круговой орбиты, Тиссеран [1895] заменил трансцендентное уравнение (3.8) приближенным алгебраическим уравнением. Для этого он предположил, что интервал между наблюдениями бесконечно мал, и что орбита Земли круговая. Полученный им критерий, будучи приближенным, не решает до конца вопрос о возможности круговой орбиты. С другой стороны, этот критерий мало удобен, так как требует перехода от экваториальных координат планеты к эклиптическим. По этим причинам он не представляет практического интереса. Подробно этот вопрос был рассмотрен М. А. Вильевым [1919].