§ 5. Вычисление эллиптической орбиты по двум наблюдениям

В тех случаях, когда по двум рассматриваемым наблюдениям вычисление круговой орбиты оказывается невозможным, а других наблюдений нет, можно использовать эти два наблюдения для вычисления эллиптической орбиты, подчиненной некоторым дополнительным условиям. Такого рода эллиптическая орбита может служить в течение некоторого времени для получения достаточно удовлетворительной эфемериды, но для суждения о действительном движении планеты она дает не больше, чем круговая орбита.

Два дополнительных условия, которые приходится налагать здесь на эллиптическую орбиту, могут быть выбраны различно. Вяйсяля, предложивший употребление такого рода эллиптических орбит, подчиняет их двум условиям: момент прохождения через перигелий совпадает с моментом второго наблюдения; геоцентрическое расстояние планеты в момент второго наблюдения имеет некоторую произвольно выбранную, в известных пределах, величину. Способ Вяйсяля будет указан дальше (§ 16 гл. XIII). Он подробно излагается в учебниках А. Я. и Б. А. Орловых [1940] и А. Д. Дубяго [1949]. Другой способ, в котором для устранения неопределенности задачи фиксируется эксцентриситет эллиптической орбиты и предполагается, что момент прохождения через перигелий находится по середине между моментами наблюдений, был предложен Б. А. Орловым [1939]. Этот способ может быть представлен в следующем виде, являющимся естественным обобщением изложенного в § 3 способа нахождения круговой орбиты.

Обозначим через $(r, -v, -E, -M)$ и (r, v, E, M) радиусы-векторы и аномалии в моменты двух рассматриваемых наблюдений. Сохраняя в остальном обозначения, принятые в § 3, получим

$$\rho_1 = \sqrt{r^2 - S_1^2} - C_1; \quad \rho_2 = \sqrt{r^2 - S_2^2} - C_2, \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1; \ y_1 = \mu_1\rho_1 - Y_1; \ z_1 = \nu_1\rho_1 - Z_1, \\ x_2 &= \lambda_2\rho_2 - X_2; \ y_2 = \mu_2\rho_2 - Y_2; \ z_2 = \nu_2\rho_2 - Z_2, \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

$$\sin^2 v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2r^2}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \tag{5.3}$$

С другой стороны, формулы эллиптического движения дают

$$a = \frac{r(1 + e\cos v)}{1 - e^2}; \quad \sin E = \frac{r \sin v}{a\sqrt{1 - e^2}}; \quad M = E - e\sin E. \tag{5.4}$$

Так как для эксцентриситета принято некоторое фиксированное значение (например, $e=0{,}15$ или $e=0{,}20$), то формулы

(5.1)—(5.4) позволяют для любого значения r вычислить соответствующее значение M. Полученное таким образом значение средней аномалии назовем геометрическим и обозначим через M_g.

С другой стороны, средняя аномалия дается равенством

$$M = \frac{1}{2} k (t_2 - t_1) a^{-3/2}; \quad \left(\frac{1}{2} k = 0,49280\right). \tag{5.5}$$

Это значение можно назвать динамическим и обозначить через M_d.

Задача приводится, таким образом, к решению уравнения

$$f(r) = M_g - M_d = 0$$

относительно r. Для первых двух проб можно взять $r=2,3$ и $r=2,6$. Применение линейного интерполирования быстро приводит к цели.

Получив окончательное значение r, а следовательно, и величин (5.2), мы можем вычислить направляющие косинусы по формулам, аналогичным формулам (3.9), а именно,

$$P_x = M(x_2 + x_1); \quad P_y = M(y_2 + y_1); \quad P_z = M(z_2 + z_1),$$
$$Q_x = N(x_2 - x_1); \quad Q_y = N(y_2 - y_1); \quad Q_z = N(z_2 - z_1),$$

где

$$M = (2r \cos v)^{-1}; \quad N = (2r \sin v)^{-1}.$$

Переход к элементам i, Ω, ω, если они нужны, выполняется как обычно.

В заключение заметим, что для $e=0,15$ формулы (5.4) имеют такой вид:

$$a = 1,02302\, r(1 + 0,15 \cos v), \qquad a \sin E = 1,01144\, r \sin v,$$
$$M = E - 8^\circ,5944 \sin E;$$

если же взять $e=0,20$, то

$$a = 1,04167\, r(1 + 0,20 \cos v), \qquad a \sin E = 1,02062\, r \sin v,$$
$$M = E - 11^\circ,4592 \sin E.$$

В то время как круговая орбита вычисляется с 4—5 десятичными знаками, здесь лучше употреблять 5—6 знаков.