Это даст

$$a = \frac{1}{n}(\Delta\alpha_1 + \ldots + \Delta\alpha_n).$$

Но a есть не что иное, как разность между действительным и вычисленным прямым восхождением для момента t_0. Поэтому, вычислив для момента t_0 прямое восхождение при помощи исходной системы элементов и придав к нему a, получим то прямое восхождение, которое должны были бы давать для этого момента наблюдения. Все сказанное одинаково применимо и к склонениям. Таким образом, приходим к следующему правилу:

Если n наблюдений, произведенных в моменты t_i ($i=1, \ldots, n$), дают разности $\Delta\alpha_i$, $\Delta\delta_i$, не обнаруживающие систематического хода или же имеющие ход, пропорциональный времени, то эти n наблюдений можно заменить одним фиктивным наблюдением (нормальным местом). Для этого вычисляем для момента

$$t_0 = \frac{1}{n}(t_1 + \ldots + t_n)$$

прямое восхождение и склонение светила и прибавляем к ним поправки

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \Delta\alpha_i; \quad \frac{1}{n}\sum_1^n \Delta\delta_i.$$

Как известно из теории ошибок, мы можем рассчитывать, что случайная ошибка полученного этим путем фиктивного наблюдения в $\sqrt{n}$ раз меньше случайной ошибки каждого из n взятых наблюдений.

Иногда может оказаться целесообразным учитывать в формуле (2.1) и третий член. Составление нормального места становится несколько сложнее, но зато открывается возможность объединения большего числа наблюдений в одно нормальное место.

Можно также производить сглаживание $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, входящих в нормальное место, графически. Неудобством графического способа является некоторый неизбежный здесь произвол.

§ 3. Метод вариации геоцентрических расстояний

Одним из наиболее употребительных методов улучшения элементов орбиты при помощи небольшого числа наблюдений является метод вариации геоцентрических расстояний, заключающийся в следующем.

Выберем два надежных наблюдения (или два нормальных места) t_1, α_1, δ_1 и t_2, α_2, δ_2, достаточно далеко отстоящие одно от другого. При помощи исходной системы элементов вычислим геоцентрические расстояния ρ_1 и ρ_2 для моментов t_1 и t_2. При помощи геоцентрических положений

$$t_1(\rho_1, \alpha_1, \delta_1); \quad t_2(\rho_2, \alpha_2, \delta_2) \tag{3.1}$$

вычисляем соответствующие гелиоцентрические координаты

$$x_1 = \rho_1 \cos\delta_1 \cos\alpha_1 - X_1; \quad y_1 = \rho_1 \cos\delta_1 \sin\alpha_1 - Y_1; \quad z_1 = \rho_1 \sin\delta_1 - Z_1,$$

$$x_2 = \rho_2 \cos\delta_2 \cos\alpha_2 - X_2; \quad y_2 = \rho_2 \cos\delta_2 \sin\alpha_2 - Y_2; \quad z_2 = \rho_2 \sin\delta_2 - Z_2,$$

после чего находим элементы орбиты (будем обозначать их через E^{I}), пользуясь формулами гл. V. Эти элементы будут совершенно точно представлять два исходных наблюдения, как бы ошибочны ни были взятые значения ρ_1 и ρ_2. Наша задача заключается в том, чтобы подходящим варьированием ρ_1 и ρ_2 получить систему элементов, хорошо представляющую другие наблюдения.

Взяв некоторые небольшие величины $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$, вычислим при помощи геоцентрических положений

$$(\rho_1 + \Delta\rho_1, \alpha_1, \delta_1); \quad (\rho_2, \alpha_2, \delta_2) \tag{3.2}$$

систему элементов E^{II}, а при помощи положений

$$(\rho_1, \alpha_1, \delta_1); \quad (\rho_2 + \Delta\rho_2, \alpha_2, \delta_2) \tag{3.3}$$

— систему элементов E^{III}.

Выберем, далее, еще несколько наблюдений t_i, α_i, δ_i и для моментов t_i вычислим прямые восхождения и склонения при помощи всех трех систем элементов E^{I}, E^{II}, E^{III}; получим соответственно α_i^{I}, δ_i^{I}; α_i^{II}, δ_i^{II} и α_i^{III}, δ_i^{III}.

Обозначая через $\rho_1 + x \cdot \Delta\rho_1$ и $\rho_2 + y \cdot \Delta\rho_2$ те значения геоцентрических расстояний, для которых получаются как раз наблюденные значения α_i, δ_i координат светила, будем иметь

$$\alpha_i = \varphi_i(\rho_1 + x\Delta\rho_1, \rho_2 + y\Delta\rho_2),$$

$$\delta_i = \psi_i(\rho_1 + x\Delta\rho_1, \rho_2 + y\Delta\rho_2),$$

ибо α_i, δ_i являются функциями геоцентрических расстояний, взятых для двух основных наблюдений (3.1).

Принимая во внимание малость вариаций $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$, мы можем написать

$$\alpha_i = \varphi_i(\rho_1, \rho_2) + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_1}\Delta\rho_1 \cdot x + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_2}\Delta\rho_2 \cdot y$$

и, аналогично,

$$\alpha_i^{\mathrm{I}} = \varphi_i(\rho_1,\ \rho_2),$$

$$\alpha_i^{\mathrm{II}} = \varphi_i(\rho_1 + \Delta\rho_1,\ \rho_2) = \alpha_i^{\mathrm{I}} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_1}\Delta\rho_1,$$

$$\alpha_i^{\mathrm{III}} = \varphi_i(\rho_1,\ \rho_2 + \Delta\rho_2) = \alpha_i^{\mathrm{I}} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_2}\Delta\rho_2.$$

При помощи этих равенств и аналогичных для δ, окончательно получим такие уравнения для нахождения x и y:

$$(\alpha_i^{\mathrm{II}} - \alpha_i^{\mathrm{I}})x + (\alpha_i^{\mathrm{III}} - \alpha_i^{\mathrm{I}})y = \alpha_i - \alpha_i^{\mathrm{I}},$$

$$(\delta_i^{\mathrm{II}} - \delta_i^{\mathrm{I}})x + (\delta_i^{\mathrm{III}} - \delta_i^{\mathrm{I}})y = \delta_i - \delta_i^{\mathrm{I}}.$$

Решение этих уравнений по способу наименьших квадратов даст наивероятнейшие значения x и y. После этого при помощи геоцентрических положений

$$(\rho_1 + x\Delta\rho_1,\ \alpha_1,\ \delta_1),\ (\rho_2 + y\Delta\rho_2,\ \alpha_2,\ \delta_2) \tag{3.4}$$

находим улучшенную систему элементов E.

Таким образом, для каждой пары геоцентрических положений (3.1), (3.2), (3.3) и (3.4) мы должны вычислить соответствующие гелиоцентрические координаты, и затем вычислить элементы орбиты.

Сопоставление употребляемых для этого формул было сделано в гл. V. Для представления наблюдений при помощи полученных систем элементов E^{I}, E^{II}, E^{III} служат методы, указанные в гл. IV.

Что касается размеров вариаций $\Delta\rho_1$, $\Delta\rho_2$, то обычно они берутся равными 0,001.

Примечание. При употреблении метода вариации геоцентрических расстояний прибегают к следующему весьма удобному и весьма надежному способу контролирования производимой вычислительной работы. Берут еще одну пару геоцентрических положений, а именно,

$$(\rho_1 + \Delta\rho_1,\ \alpha_1,\ \delta_1),\ (\rho_2 + \Delta\rho_2,\ \alpha_2,\ \delta_2), \tag{3.5}$$

и ведут для них вычисление элементов и представление наблюдений параллельно с соответственными вычислениями для положений (3.1), (3.2) и (3.3).

Обозначая через E^{IV} и α_i^{IV}, δ_i^{IV} элементы и координаты, соответствующие гипотезе (3.5), мы должны, очевидно, иметь для каждого элемента равенство

$$E^{\mathrm{IV}} - E^{\mathrm{III}} = E^{\mathrm{II}} - E^{\mathrm{I}}$$

и точно так же для координат

$$\alpha_i^{\mathrm{IV}} - \alpha_i^{\mathrm{III}} = \alpha_i^{\mathrm{II}} - \alpha_i^{\mathrm{I}},$$

$$\delta_i^{\mathrm{IV}} - \delta_i^{\mathrm{III}} = \delta_i^{\mathrm{II}} - \delta_i^{\mathrm{I}}.$$

Выполнение этих равенств (справедливых также и для всех промежуточных величин) будет свидетельствовать не только о верности вычислений, но и о допустимости основного предположения, на котором построен весь метод: изменения координат α_i, δ_i пропорциональны изменениям геоцентрических расстояний основных положений (3.1).

§ 4. Улучшение орбит малых планет

В настоящее время вновь открытая малая планета не привлекает к себе особого внимания наблюдателей, так что в первую оппозицию редко набирается больше 5—6 наблюдений. При таких условиях не только нет возможности составить нормальные места, но и контроль наблюдений способом, указанным в § 2, может быть не всегда осуществим. С другой стороны, промежуток времени, охватываемый наблюдениями, редко превышает 2—2$^1/_2$ месяца, так что не приходится рассчитывать на получение особенно точной орбиты.

Принимая все это во внимание, обычно довольствуются вычислением орбиты по трем наблюдениям (если наклон мал, то по четырем), но выбирают наиболее надежные и далеко отстоящие друг от друга наблюдения. Только в редких случаях прибегают к вариации геоцентрических расстояний.

После того как планета наблюдалась в двух-трех соседних оппозициях, применяют метод вариации геоцентрических расстояний. При этом все наблюдения одной оппозиции соединяются в одно или два нормальных места. Поскольку при таком улучшении орбиты пренебрегают возмущениями, нельзя рассчитывать на представление наблюдений с большой точностью. Дальнейшее улучшение орбиты производится уже с учетом возмущений от Юпитера, причем употребляется главным образом метод вариации элементов, который будет изложен дальше.

В тех случаях, когда имеется в виду лишь обеспечить наблюдение малой планеты в ближайшие оппозиции, нередко прибегают к эмпирическому исправлению средней аномалии. Опыт показывает, что из всех элементов, получаемых из наблюдений, охватывающих небольшую часть орбиты, наименее надежным является среднее суточное движение. Поэтому, когда мы констатируем разницу между наблюденным и вычисленным положением планеты, эта разница зависит главным образом от неверно найденной величины средней аномалии. Принимая это во внимание, поступаем следующим образом:

Пусть для соседней оппозиции наблюдения дали положение планеты α^o, δ^o, тогда как наши исходные элементы дают для этого же момента α^c, δ^c. Оставляя все элементы без изменения, дадим M приращение ΔM (например, $\Delta M = 1°$) и снова вычислим координаты планеты; получим α^v, δ^v.