Обозначим через $x\Delta M$ то приращение, которое надо придать M, чтобы получить наблюденные координаты. Так как α и δ для рассматриваемого момента являются функциями M, то будем иметь

$$\alpha^0 = \varphi(M + x\Delta M), \quad \delta^0 = \psi(M + x\Delta M),$$
$$\alpha^c = \varphi(M), \quad \delta^c = \psi(M),$$
$$\alpha^v = \varphi(M + \Delta M), \quad \delta^v = \psi(M + \Delta M).$$

Разлагая эти функции по степеням малых приращений и отбрасывая члены выше первой степени, получим для нахождения x два уравнения:

$$\alpha^0 - \alpha^c = x(\alpha^v - \alpha^c); \ \delta^0 - \delta^c = x(\delta^v - \delta^c).$$

Если эти уравнения дают достаточно согласующиеся значения для x, то это доказывает допустимость сделанных нами гипотез. Разделив полученную поправку $x\Delta M$ на соответствующий промежуток времени, получим эмпирическую поправку среднего суточного движения.

§ 5. Улучшение параболической орбиты

Первая орбита для вновь открытой кометы вычисляется почти всегда как параболическая. По мере получения дальнейших наблюдений элементы этой параболической орбиты уточняют, оставляя сначала эксцентриситет равным единице. Для этого служит метод вариации отношения двух геоцентрических расстояний, заключающийся в следующем.

Выберем два наблюдения (или два нормальные места) t_1, α_1, δ_1 и t_2, α_2, δ_2, по возможности далеко отстоящие одно от другого, и некоторое число других наблюдений t_i, α_i, δ_i.

Для каждого значения отношения

$$M = \rho_2/\rho_1 \tag{5.1}$$

мы можем найти (в предположении, что орбита параболическая) соответствующие значения геоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2, а следовательно, и элементов орбиты. Вычислив, далее, с этими элементами координаты комет α_i^c, δ_i^c для момента t_i, получим разности

$$\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_i^c; \quad \Delta\delta_i = \delta_i - \delta_i^c$$

между наблюденными и вычисленными значениями координат, соответствующие взятому значению M.

Таким образом,

$$\Delta\alpha_i = \varphi_i(M); \quad \Delta\delta_i = \psi_i(M), \tag{5.2}$$

и задача приводится к нахождению такого значения M, при котором величины (5.2) наиболее близки к нулю. Такое значение M даст параболическую орбиту, точно представляющую наблюдения в моменты t_1, t_2 и наилучшим образом согласующуюся с наблюдениями в моменты t_i.

Искомое значение M легко находится интерполированием. Пусть M^{I} есть значение M, даваемое предварительной орбитой, а $\Delta\alpha_i^{\mathrm{I}}$, $\Delta\delta_i^{\mathrm{I}}$ — соответствующие значения функций (5.2). Пусть для

$$M = M^{\mathrm{II}} = M^{\mathrm{I}} + \Delta M$$

эти функции равны $\Delta\alpha_i^{\mathrm{II}}$, $\Delta\delta_i^{\mathrm{II}}$, так что (отбрасывая члены второго порядка)

$$\Delta\alpha_i^{\mathrm{II}} = \Delta\alpha_i^{\mathrm{I}} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial M}\Delta M; \quad \Delta\delta_i^{\mathrm{II}} = \Delta\delta_i^{\mathrm{I}} + \frac{\partial\psi_i}{\partial M}\Delta M.$$

Искомое значение M мы можем представить в форме

$$M = M^{\mathrm{I}} + x\Delta M, \tag{5.3}$$

что дает для нахождения x уравнения

$$\varphi_i(M^{\mathrm{I}} + x\Delta M) = 0; \quad \psi_i(M^{\mathrm{I}} + x\Delta M) = 0,$$

или

$$\Delta\alpha_i^{\mathrm{I}} + x(\Delta\alpha_i^{\mathrm{II}} - \Delta\alpha_i^{\mathrm{I}}) = 0; \ \Delta\delta_i^{\mathrm{I}} + x(\Delta\delta_i^{\mathrm{II}} - \Delta\delta_i^{\mathrm{I}}) = 0. \tag{5.4}$$

Получив из этих уравнений вероятнейшее значение x, мы можем найти, при помощи соответствующей величины (5.3), улучшенную параболическую орбиту.

Убедиться в законности применения линейного интерполирования, лежащего в основе уравнений (5.4), можно следующим образом. Обозначим через E^{I}, E^{II} и E значения какого-либо элемента (или какой-нибудь промежуточной величины), соответствующие значениям

$$M^{\mathrm{I}}; \ M^{\mathrm{I}} + \Delta M; \ M^{\mathrm{I}} + x\Delta M$$

величины M. Критерием законности отбрасывания членов второго порядка является выполнение равенства

$$E - E^{\mathrm{I}} = x(E^{\mathrm{II}} - E^{\mathrm{I}}).$$

Если окажется, что вариации ΔM и $x\Delta M$ слишком велики и линейное интерполирование не может дать достаточно точного результата, указанное вычисление надо повторить, взяв другое значение для M^{I}.

В заключение напомним формулы, по которым здесь производится вычисление. Для нахождения геоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2, соответствующих принятому значению M, можно воспользоваться уравнениями (6.2), (6.3), (7.3), (6.5) гл. IX:

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\rho_2 = M\rho_1,} \\ x_1 = \lambda_1\rho_1 - X_1, & x_2 = \lambda_2\rho_2 - X_2, \\ y_1 = \mu_1\rho_1 - Y_1, & y_2 = \mu_2\rho_2 - Y_2, \\ z_1 = \nu_1\rho_1 - Z_1, & z_2 = \nu_2\rho_2 - Z_2, \\ r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ \multicolumn{2}{c}{\varkappa^2 = 2(r_1r_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2),} \\ \multicolumn{2}{c}{R = r_1 + r_2 - \varkappa; \quad 18\tau^2 = R(2R + 3\varkappa)^2,} \end{array}\right\} \qquad (5.5)$$

где

$$\tau = 0{,}017\,202\,099\,(t_2 - t_1).$$

Три последние из равенств (5.5) могут быть заменены такими (§ 2 гл. IX):

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

$$\theta_0 (2\tau)^2 = s^2 (r_1 + r_2).$$

Входящая сюда величина θ_0 берется из таблицы IX по аргументу

$$c = s^2 (r_1 + r_2)^{-2}.$$

С полученными в последнем приближении значениями гелиоцентрических координат (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) элементы орбиты вычисляются по формулам, указанным выше (§ 4 или § 8 гл. IX).

§ 6. Непараболические кометные орбиты

Непараболические кометные орбиты можно разделить с точки зрения вычисления орбит на две группы.

Первую группу составляют короткопериодические кометы. У них эксцентриситет настолько отличается от единицы, что применение указанного в предыдущем параграфе метода сразу обнаружит, что движение кометы не может быть представлено параболической орбитой. В случаях такого рода либо применяют метод вариации геоцентрических расстояний, либо вычисляют орбиту по трем нормальным местам, разделенным по возможности большими интервалами времени. В этом последнем случае для первого приближения берут значения отношений пло-