воспользоваться уравнениями (6.2), (6.3), (7.3), (6.5) гл. IX:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_2 = M\rho_1, \\ &x_1 = \lambda_1\rho_1 - X_1, \qquad x_2 = \lambda_2\rho_2 - X_2, \\ &y_1 = \mu_1\rho_1 - Y_1, \qquad y_2 = \mu_2\rho_2 - Y_2, \\ &z_1 = \nu_1\rho_1 - Z_1, \qquad z_2 = \nu_2\rho_2 - Z_2, \\ &r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \qquad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ &\varkappa^2 = 2(r_1r_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2), \\ &R = r_1 + r_2 - \varkappa; \quad 18\tau^2 = R(2R + 3\varkappa)^2, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

где

$$\tau = 0{,}017\,202\,099\,(t_2 - t_1).$$

Три последние из равенств (5.5) могут быть заменены такими (§ 2 гл. IX):

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

$$\theta_0(2\tau)^2 = s^2(r_1 + r_2).$$

Входящая сюда величина θ_0 берется из таблицы IX по аргументу

$$c = s^2(r_1 + r_2)^{-2}.$$

С полученными в последнем приближении значениями гелиоцентрических координат (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) элементы орбиты вычисляются по формулам, указанным выше (§ 4 или § 8 гл. IX).

§ 6. Непараболические кометные орбиты

Непараболические кометные орбиты можно разделить с точки зрения вычисления орбит на две группы.

Первую группу составляют короткопериодические кометы. У них эксцентриситет настолько отличается от единицы, что применение указанного в предыдущем параграфе метода сразу обнаружит, что движение кометы не может быть представлено параболической орбитой. В случаях такого рода либо применяют метод вариации геоцентрических расстояний, либо вычисляют орбиту по трем нормальным местам, разделенным по возможности большими интервалами времени. В этом последнем случае для первого приближения берут значения отношений площадей треугольников, даваемые предварительной параболической орбитой.

Вторую группу составляют кометные орбиты с эксцентриситетами хотя и очень мало, но все же заметно отличающимися от единицы. В этих случаях движение кометы обычно может быть представлено параболической орбитой настолько удовлетворительно, что отличие эксцентриситета от единицы можно учитывать лишь на заключительных стадиях работы. Метод вариации геоцентрических расстояний становится здесь малоудобным, и для перехода от параболической орбиты к близкой к ней эллиптической или гиперболической орбите предпочитают пользоваться следующим методом.

Метод вариации большой полуоси и одного геоцентрического расстояния

Возьмем два вполне надежные основные наблюдения t_1, α_1, δ_1 и t_2, α_2, δ_2, разделенные по возможности большим интервалом времени, и несколько других наблюдений t_i, α_i, δ_i.

При помощи имеющейся параболической орбиты вычислим геоцентрическое расстояние $\rho_1 = \rho_1'$ для момента первого из основных наблюдений. Затем найдем из уравнений (5.5) соответствующее значение ρ_2 для момента второго основного наблюдения. Элементы параболической орбиты, вычисленной при помощи этих значений ρ_1' и ρ_2', обозначим через E'.

Вычислим, далее, вторую параболическую орбиту, взяв для момента первого основного наблюдения геоцентрическое расстояние

$$\rho_1'' = \rho_1' + \Delta\rho_1,$$

где $\Delta\rho_1$ — некоторое выбранное нами приращение (чаще всего берется $\pm 0{,}001$). Соответствующее значение ρ_2'' получается, как и в предыдущем случае, решением системы (5.5). Элементы этой орбиты обозначим через E''.

Положив для краткости

$$1/4a = \tilde{a},$$

где a — большая полуось орбиты, мы можем сказать, что для двух вычисленных нами орбит $\tilde{a} = 0$.

Вычислим теперь третью орбиту, взяв для первого геоцентрического расстояния такое же значение ρ_1', как и для первой орбиты, но положив $\tilde{a} = \Delta\tilde{a}$, где $\Delta\tilde{a}$ — небольшая величина, равная например $+0{,}002$, или $+0{,}001$. Соответствующее значение

$\rho_2 = \rho_2'''$ найдем, решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 = \lambda_1\rho_1 - X_1; \qquad && x_2 = \lambda_2\rho_2 - X_2,\\
&y_1 = \mu_1\rho_1 - Y_1; && y_2 = \mu_2\rho_2 - Y_2,\\
&z_1 = \nu_1\rho_1 - Z_1; && z_2 = \nu_2\rho_2 - Z_2,\\
&r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; && r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,\\
&\quad s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, &&\\
&\sqrt{8}\,(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{3/2}\,V(\zeta) \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2}V(\zeta'), &&\\
&\quad \zeta = \tilde{a}\,(r_1 + r_2 + s); \quad \zeta' = \tilde{a}\,(r_1 + r_2 - s), &&\\
&\quad \sqrt{8} = 2{,}828\ 4271, &&
\end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

причем значения функции $V(\zeta)$ берутся из таблицы VIIa или VIIb.

Система (6.1) отличается от системы (5.5) только тем, что входящее в нее уравнение Эйлера заменено уравнением Ламберта (§ 13 гл. V). Решение системы (6.1) выполняется, как всегда в таких случаях, интерполированием, которое существенно облегчается тем, что искомая величина ρ_2''' мало отличается от ρ_2'.

Элементы третьей орбиты, полученной при помощи геоцентрических расстояний $\rho_1 = \rho_1'$, $\rho_2 = \rho_2'''$, обозначим через E'''.

Для каждой из трех вычисленных орбит найдем соответствующие разности $\Delta\alpha_i'$, $\Delta\alpha_i''$, $\Delta\alpha_i'''$ и $\Delta\delta_i'$, $\Delta\delta_i''$, $\Delta\delta_i'''$ между наблюденными и вычисленными координатами в моменты t_i.

Так как

$$\Delta\alpha_i = \varphi_i(\rho_1, \tilde{a}); \quad \Delta\delta_i = \psi_i(\rho_1, \tilde{a}), \tag{6.2}$$

то будем иметь

$$\Delta\alpha_i' = \varphi_i(\rho_1', 0); \quad \Delta\alpha_i'' = \varphi_i(\rho_1' + \Delta\rho_1, 0),$$

$$\Delta\alpha_i''' = \varphi_i(\rho_1', \Delta\tilde{a})$$

и аналогично для склонений.

Отсюда, пренебрегая вторыми степенями приращений $\Delta\rho_1$ и $\Delta\tilde{a}$, получим:

$$\Delta\alpha_i'' = \Delta\alpha_i' + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_1}\Delta\rho_1; \quad \Delta\alpha_i''' = \Delta\alpha_i' + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\tilde{a}}\Delta\tilde{a}.$$

Если через

$$\rho_1 = \rho_1' + x\Delta\rho_1; \quad \tilde{a} = y\Delta\tilde{a} \tag{6.3}$$

обозначить искомые значения неизвестных ρ_1 и $\tilde{a}$, обращающие в нуль разности (6.2), то с той же точностью получим

$$x(\Delta\alpha'_l - \Delta\alpha''_l) + y(\Delta\alpha'_l - \Delta\alpha'''_l) = \Delta\alpha'_l,$$
$$x(\Delta\delta'_l - \Delta\delta''_l) + y(\Delta\delta'_l - \Delta\delta'''_l) = \Delta\delta'_l.$$

Решение этих уравнений даст наиболее вероятные значения x, y, а следовательно, и ρ_1, $\tilde{a}$.

Удобный и надежный контроль дает сравнение элементов E', E'', E''' (а также любых промежуточных величин, служащих для их получения) с элементами E орбиты, непосредственно вычисляемой со значениями (6.3). Если вычисления выполнены правильно, то должны выполняться равенства

$$E - E' = x(E'' - E') + y(E''' - E').$$

Выполнение этих равенств является также критерием применимости линейного интерполирования при взятых приращениях неизвестных величин.

Вычисление элементов выполняется здесь особенно просто, так как большая полуось известна (§ 13 гл. V).

§ 7. Метод вариации элементов

Дифференциальный метод, или, иначе, метод вариации элементов, употребляется для нахождения такой орбиты, которая удовлетворяла бы наилучшим образом всей совокупности имеющихся наблюдений. В приближенных методах, изученных в предыдущих параграфах, искомая орбита была связана дополнительным условием: она должна была совершенно точно представлять два наблюдения, принятые за основные. Дифференциальный метод позволяет находить орбиту без такого условия, произвольно выделяющего два наблюдения среди всех остальных.

Наилучшей орбитой считается вероятнейшая орбита, т. е. такая, для которой сумма квадратов отклонений вычисленных положений светила от наблюденных имеет минимальную величину.

Обозначим через E_1, E_2, ..., E_6 элементы орбиты, уже настолько близкие к истинным, что вычисленные с этими элементами координаты светила α^c, δ^c отличаются от наблюденных координат α^0, δ^0 на малые величины

$$d\alpha = \alpha^0 - \alpha^c; \quad d\delta = \delta^0 - \delta^c,$$

квадратами которых можно пренебречь.