обозначить искомые значения неизвестных ρ_1 и $\tilde{a}$, обращающие в нуль разности (6.2), то с той же точностью получим

$$x(\Delta\alpha'_l - \Delta\alpha''_l) + y(\Delta\alpha'_l - \Delta\alpha'''_l) = \Delta\alpha'_l,$$
$$x(\Delta\delta'_l - \Delta\delta''_l) + y(\Delta\delta'_l - \Delta\delta'''_l) = \Delta\delta'_l.$$

Решение этих уравнений даст наиболее вероятные значения x, y, а следовательно, и ρ_1, $\tilde{a}$.

Удобный и надежный контроль дает сравнение элементов E', E'', E''' (а также любых промежуточных величин, служащих для их получения) с элементами E орбиты, непосредственно вычисляемой со значениями (6.3). Если вычисления выполнены правильно, то должны выполняться равенства

$$E - E' = x(E'' - E') + y(E''' - E').$$

Выполнение этих равенств является также критерием применимости линейного интерполирования при взятых приращениях неизвестных величин.

Вычисление элементов выполняется здесь особенно просто, так как большая полуось известна (§ 13 гл. V).

§ 7. Метод вариации элементов

Дифференциальный метод, или, иначе, метод вариации элементов, употребляется для нахождения такой орбиты, которая удовлетворяла бы наилучшим образом всей совокупности имеющихся наблюдений. В приближенных методах, изученных в предыдущих параграфах, искомая орбита была связана дополнительным условием: она должна была совершенно точно представлять два наблюдения, принятые за основные. Дифференциальный метод позволяет находить орбиту без такого условия, произвольно выделяющего два наблюдения среди всех остальных.

Наилучшей орбитой считается вероятнейшая орбита, т. е. такая, для которой сумма квадратов отклонений вычисленных положений светила от наблюденных имеет минимальную величину.

Обозначим через E_1, E_2, ..., E_6 элементы орбиты, уже настолько близкие к истинным, что вычисленные с этими элементами координаты светила α^c, δ^c отличаются от наблюденных координат α^o, δ^o на малые величины

$$d\alpha = \alpha^o - \alpha^c; \quad d\delta = \delta^o - \delta^c,$$

квадратами которых можно пренебречь.

Обозначим, далее, через $E_1+dE_1, \ldots, E_6+dE_6$, вероятнейшие элементы, а через α, δ — координаты, соответствующие этим элементам.

Условие, которым определяются вероятнейшие элементы, может быть написано так:

$$\sum \{\cos^2\delta(\alpha-\alpha^o)^2+(\delta-\delta^o)^2\} = \text{Minimum}, \tag{7.1}$$

потому что стоящая под знаком суммы величина есть квадрат расстояния на сфере между положениями (α, δ) и (α^o, δ^o).

Полагая

$$\alpha^c = f(E_1, E_2, \ldots, E_6),$$

получим

$$\alpha-\alpha^c = \frac{\partial f}{\partial E_1}dE_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial E_6}dE_6,$$

$$\alpha-\alpha^o = \alpha-\alpha^c-(\alpha^o-\alpha^c) = \frac{\partial\alpha}{\partial E_1}dE_1+\ldots+\frac{\partial\alpha}{\partial E_6}dE_6-d\alpha.$$

Отсюда ясно, что условие (7.1) будет соблюдено, если мы найдем $dE_1, \ldots, dE_6$ из уравнений (написанных для всех рассматриваемых наблюдений)

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial E_1}dE_1+\ldots+\cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial E_6}dE_6 &= \cos\delta\, d\alpha, \\ \frac{\partial\delta}{\partial E_1}dE_1+\ldots+\frac{\partial\delta}{\partial E_6}dE_6 &= d\delta \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

таким образом, чтобы сумма квадратов остающихся невязок была бы минимальна. Иначе говоря, вероятнейшие поправки элементов мы получим, решая уравнения (7.2) по способу наименьших квадратов.

Задача приводится, таким образом, прежде всего к вычислению коэффициентов уравнений (7.2), т. е. к нахождению производных сферических координат α и δ по всем элементам. Это вычисление распадается на два этапа.

Дифференцируя формулы

$$\rho\cos\delta\cos\alpha = x+X,$$
$$\rho\cos\delta\sin\alpha = y+Y,$$
$$\rho\sin\delta = z+Z$$

по элементам орбиты (считая, следовательно, t постоянным), получим

$$\cos\delta\cos\alpha\, d\rho-\rho\cos\delta\sin\alpha\, d\alpha-\rho\sin\delta\cos\alpha\, d\delta = dx,$$
$$\cos\delta\sin\alpha\, d\rho+\rho\cos\delta\cos\alpha\, d\alpha-\rho\sin\delta\sin\alpha\, d\delta = dy,$$
$$\sin\delta\, d\rho \qquad\qquad +\rho\cos\delta\, d\delta = dz,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \rho\cos\delta\, d\alpha &= -\sin\alpha\, dx + \cos\alpha\, dy, \\ \rho\, d\delta &= -\sin\delta\cos\alpha\, dx - \sin\delta\sin\alpha\, dy + \cos\delta\, dz, \\ d\rho &= \cos\delta\cos\alpha\, dx + \cos\delta\sin\alpha\, dy + \sin\delta\, dz. \end{aligned}\right\} \quad (7.3)$$

Для дальнейших вычислений эти уравнения удобно представить в матричной форме ($\tilde\rho = \rho^{-1}$):

$$\begin{Vmatrix} -\tilde\rho\sin\alpha & +\tilde\rho\cos\alpha & 0 \\ -\tilde\rho\sin\delta\cos\alpha & -\tilde\rho\sin\delta\sin\alpha & +\tilde\rho\cos\delta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\delta\, d\alpha \\ d\delta \end{Vmatrix}. \quad (7.4)$$

Обозначим через

$$x_{E_i} = \frac{\partial x}{\partial E_i}; \quad y_{E_i} = \frac{\partial y}{\partial E_i}; \quad z_{E_i} = \frac{\partial z}{\partial E_i} \quad (7.5)$$

частные производные гелиоцентрических координат по элементам. Тогда

$$dx = \sum x_{E_i} dE_i; \ \ldots,$$

или, в матричной форме,

$$\begin{Vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_{E_1} & \ldots & x_{E_6} \\ y_{E_1} & \ldots & y_{E_6} \\ z_{E_1} & \ldots & z_{E_6} \end{Vmatrix} \{dE_1, dE_2, \ldots, dE_6\}, \quad (7.6)$$

где символом $\{\ldots\}$ обозначена, как обычно, одностолбцовая матрица.

Подстановка выражения (7.6) в уравнения (7.4), выполняемая всегда численно, дает искомые условные уравнения

$$\begin{Vmatrix} (\alpha, 1) & (\alpha, 2) & \ldots & (\alpha, 6) \\ (\delta, 1) & (\delta, 2) & \ldots & (\delta, 6) \end{Vmatrix} \{dE_1, \ldots, dE_6\} = \begin{Vmatrix} \cos\delta\, d\alpha \\ d\delta \end{Vmatrix}, \quad (7.7)$$

где (α, i), (δ, i) означают коэффициенты при dE_i.

Уравнения (7.7), составленные для всех рассматриваемых наблюдений (или нормальных мест), решаются способом наименьших квадратов. Это дает вероятнейшие значения искомых поправок $dE_1, \ldots, dE_6$ и их средние ошибки.

Первый этап работы по составлению уравнений (7.7) заключается в вычислении для каждого наблюдения коэффициентов уравнений (7.4). Это выполняется весьма просто. Второй этап — вычисление восемнадцати частных производных (7.5) — представляет значительно более сложную задачу.

При вычислении этих производных удобно разделить элементы орбиты на две группы: на элементы **внутренние** и **внешние**. Внутренними элементами будем называть те, которые определяют движение по орбите, т. е. a, e, M_0 для эллиптического движения и q, T для движения параболического. Внешними элементами будем называть элементы Ω, i, ω (или им эквивалентные), определяющие положение орбиты относительно избранной координатной системы.

§ 8. Производные координат по внешним элементам

Положение орбиты в пространстве может определяться либо эклиптическими элементами Ω, i, ω, либо экваториальными элементами Ω', i', ω'.

Чтобы найти производные x, y, z по экваториальным элементам, заметим, что перемещение орбиты из положения с элементами Ω', i', ω' в положение, соответствующее элементам $\Omega'+d\Omega'$, $i'+di'$, $\omega'+d\omega'$, можно рассматривать как результат бесконечно малого поворота вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат S. Обозначим через $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$ проекции вектора вращения на оси координат. Изменения координат точки x, y, z орбиты, вызванные этим вращением, даются, как известно, формулами

$$\left.\begin{aligned} dx &= z\,d\psi_y - y\,d\psi_z, \\ dy &= x\,d\psi_z - z\,d\psi_x, \\ dz &= y\,d\psi_x - x\,d\psi_y. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Подстановка этих выражений (совместно с дифференциалами x, y, z по другим элементам) в равенства (7.4) даст условные уравнения, позволяющие найти компоненты вращения $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$. Остается показать, как от этих компонентов перейти к искомым величинам $d\Omega'$, di', $d\omega'$.

Обозначим через SN положительное направление линии узлов, а через $S\zeta$ — положительное направление нормали к плоскости орбиты.

Рассматриваемое нами вращение плоскости орбиты можно, очевидно, получить в результате трех вращений: поворота на угол $d\Omega'$ вокруг оси Sz, поворота на угол di' вокруг SN, и поворота на угол $d\omega'$ вокруг $S\zeta$. Поэтому

$$\begin{aligned} d\psi_x &= d\Omega' \cos(xSz) + di' \cos(xSN) + d\omega' \cos(xS\zeta), \\ d\psi_y &= d\Omega' \cos(ySz) + di' \cos(ySN) + d\omega' \cos(yS\zeta), \\ d\psi_z &= d\Omega' \cos(zSz) + di' \cos(zSN) + d\omega' \cos(zS\zeta). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos(xS\zeta) &= R_x = +\sin i' \sin\Omega', \\ \cos(yS\zeta) &= R_y = -\sin i' \cos\Omega', \\ \cos(zS\zeta) &= R_z = +\cos i', \end{aligned}$$