которые определяют движение по орбите, т. е. a, e, M_0 для эллиптического движения и q, T для движения параболического. Внешними элементами будем называть элементы Ω, i, ω (или им эквивалентные), определяющие положение орбиты относительно избранной координатной системы.

§ 8. Производные координат по внешним элементам

Положение орбиты в пространстве может определяться либо эклиптическими элементами Ω, i, ω, либо экваториальными элементами Ω', i', ω'.

Чтобы найти производные x, y, z по экваториальным элементам, заметим, что перемещение орбиты из положения с элементами Ω', i', ω' в положение, соответствующее элементам $\Omega'+d\Omega'$, $i'+di'$, $\omega'+d\omega'$, можно рассматривать как результат бесконечно малого поворота вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат S. Обозначим через $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$ проекции вектора вращения на оси координат. Изменения координат точки x, y, z орбиты, вызванные этим вращением, даются, как известно, формулами

$$\left.\begin{aligned} dx &= z\,d\psi_y - y\,d\psi_z, \\ dy &= x\,d\psi_z - z\,d\psi_x, \\ dz &= y\,d\psi_x - x\,d\psi_y. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Подстановка этих выражений (совместно с дифференциалами x, y, z по другим элементам) в равенства (7.4) даст условные уравнения, позволяющие найти компоненты вращения $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$. Остается показать, как от этих компонентов перейти к искомым величинам $d\Omega'$, di', $d\omega'$.

Обозначим через SN положительное направление линии узлов, а через $S\zeta$ — положительное направление нормали к плоскости орбиты.

Рассматриваемое нами вращение плоскости орбиты можно, очевидно, получить в результате трех вращений: поворота на угол $d\Omega'$ вокруг оси Sz, поворота на угол di' вокруг SN, и поворота на угол $d\omega'$ вокруг $S\zeta$. Поэтому

$$\begin{aligned} d\psi_x &= d\Omega' \cos(xSz) + di' \cos(xSN) + d\omega' \cos(xS\zeta), \\ d\psi_y &= d\Omega' \cos(ySz) + di' \cos(ySN) + d\omega' \cos(yS\zeta), \\ d\psi_z &= d\Omega' \cos(zSz) + di' \cos(zSN) + d\omega' \cos(zS\zeta). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos(xS\zeta) &= R_x = +\sin i' \sin\Omega', \\ \cos(yS\zeta) &= R_y = -\sin i' \cos\Omega', \\ \cos(zS\zeta) &= R_z = +\cos i', \end{aligned}$$

то эти равенства дают

$$\left.\begin{aligned} d\psi_x &= di' \cos\Omega' + d\omega' \sin i' \sin\Omega', \\ d\psi_y &= di' \sin\Omega' - d\omega' \sin i' \cos\Omega', \\ d\psi_z &= d\Omega' + d\omega' \cos i', \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \sin i'\, d\omega' &= d\psi_x \sin\Omega' - d\psi_y \cos\Omega', \\ di' &= d\psi_x \cos\Omega' + d\psi_y \sin\Omega', \\ d\Omega' &= d\psi_z - d\omega' \cos i'. \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

Для получения соответствующих поправок $d\Omega$, di, $d\omega$ эклиптических элементов проще всего поступить следующим образом. Рассмотрим наряду с экваториальной координатной системой $Sxyz$ еще эклиптическую гелиоцентрическую систему $S\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Так как эта система получается из экваториальной поворотом вокруг оси Sx на угол ε, то проекции вектора вращения на эклиптические координатные оси равны

$$\left.\begin{aligned} d\psi_{\bar{x}} &= d\psi_x, \\ d\psi_{\bar{y}} &= +d\psi_y \cos\varepsilon + d\psi_z \sin\varepsilon, \\ d\psi_{\bar{z}} &= -d\psi_y \sin\varepsilon + d\psi_z \cos\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

После того как по этим формулам вычислены эклиптические компоненты вектора вращения, формулы

$$\left.\begin{aligned} \sin i\, d\omega &= d\psi_{\bar{x}} \sin\Omega - d\psi_{\bar{y}} \cos\Omega, \\ di &= d\psi_{\bar{x}} \cos\Omega + d\psi_{\bar{y}} \sin\Omega, \\ d\Omega &= d\psi_{\bar{z}} - d\omega \cos i, \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

аналогичные (8.3), дадут искомые поправки эклиптических элементов.

В том случае, когда наклон орбиты мал, последние соотношения полезно дополнить еще таким:

$$d\pi = d(\Omega + \omega) = d\psi_{\bar{z}} + \operatorname{tg}\frac{i}{2} \sin i\, d\omega. \tag{8.6}$$

Примечание 1. Проекции вектора вращения на экваториальные оси координат были введены в употребление Эккертом и Брауэром [1937]. До этого вместо них употреблялись проекции dp, dq, ds вектора вращения на орбитальные оси координат. Очевидно,

$$\begin{Vmatrix} dp \\ dq \\ ds \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} d\psi_x \\ d\psi_y \\ d\psi_z \end{Vmatrix}, \tag{8.7}$$

$$\left.\begin{aligned} di &= dp \cos\omega - dq \sin\omega, \\ \sin i\, d\Omega &= dp \sin\omega + dq \cos\omega, \\ d\omega + \cos i\, d\Omega &= ds. \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Для того чтобы ввести dp, dq, ds в условные уравнения (7.7), служат формулы

$$\begin{Vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_y z - P_z y & Q_y z - Q_z y & R_y z - R_z y \\ P_z x - P_x z & Q_z x - Q_x z & R_z x - R_x z \\ P_x y - P_y x & Q_x y - Q_y x & R_x y - R_y x \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} dp \\ dq \\ ds \end{Vmatrix}, \qquad (8.9)$$

непосредственно вытекающие из (8.1) и (8.7).

Формулы (8.9) значительно сложнее, чем (8.1). Однако применение их может быть выгоднее в тех случаях, когда средние ошибки для dp, dq, ds получаются существенно меньшими, нежели для $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$.

Можно так же, как было отмечено Н. С. Самойловой-Яхонтовой [1944], ввести в условные уравнения непосредственно искомые поправки $d\Omega$, di, $d\omega$. Для этого нужно из соотношений (8.1), (8.2) и (8.5) исключить $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$, $d\psi_{\bar{x}}$, $d\psi_{\bar{y}}$, $d\psi_{\bar{z}}$. Это дает

$$\begin{Vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} d\Omega \\ di \\ d\omega \end{Vmatrix}, \qquad (8.10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -z \sin\varepsilon - y\cos\varepsilon; & a_{12} &= N_y z - N_z y; & a_{13} &= R_y z - R_z y, \\ a_{21} &= x\cos\varepsilon; & a_{22} &= N_z x - N_x z; & a_{23} &= R_z x - R_x z, \\ a_{31} &= x\sin\varepsilon; & a_{32} &= N_x y - N_y x; & a_{33} &= R_x y - R_y x, \end{aligned}$$

причем

$$N_x = \cos\Omega; \quad N_y = \sin\Omega\cos\varepsilon; \quad N_z = \cos\Omega\sin\varepsilon.$$

Примечание II. Т. Банахевич [1925] дал формулы, позволяющие по компонентам вектора вращения dp, dq, ds (или $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$) находить непосредственно новые компоненты векторных элементов P, Q, R, минуя вычисление новых значений элементов. В том случае, когда квадратом вектора вращения можно пренебречь, эти формулы принимают вид

$$\begin{Vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_x^0 & Q_x^0 & R_x^0 \\ P_y^0 & Q_y^0 & R_y^0 \\ P_z^0 & Q_z^0 & R_z^0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -ds & +dq \\ +ds & 1 & -dp \\ -dq & +dp & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_x^0 & Q_x^0 & R_x^0 \\ P_y^0 & Q_y^0 & R_y^0 \\ P_z^0 & Q_z^0 & R_z^0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & +d\psi_z & -d\psi_y \\ -d\psi_z & 1 & +d\psi_x \\ +d\psi_y & -d\psi_x & 1 \end{Vmatrix},$$

где через $P_x^0, \ldots, R_z^0$ обозначены старые значения направляющих косинусов, а через $P_x, \ldots, R_z$ — новые значения, соответствующие исправленным элементам.