§ 9. Производные координат по внутренним элементам. Случай эллиптической орбиты

Наиболее простые и удобные выражения для производных экваториальных координат x, y, z по внутренним элементам получаются, если для каждого рассматриваемого момента считать известными не только x, y, z, но и их производные по времени $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Этот путь был указан Эккертом и Брауэром [1937].

Обратимся к основным формулам эллиптического движения. Прежде всего заметим, что из соотношения

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

связывающего t и M, вытекает

$$\dot{x} = n\frac{\partial x}{\partial M}; \quad \dot{y} = n\frac{\partial y}{\partial M}; \quad \dot{z} = n\frac{\partial z}{\partial M},$$

где через $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ обозначены производные координат по t.

Отсюда, обозначая через $\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right), \ldots$ частные производные, взятые по n, фигурирующему в координатах явно (а не через посредство a), получаем

$$\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right) = \frac{\dot{x}}{n}(t - t_0); \quad \left(\frac{\partial y}{\partial n}\right) = \frac{\dot{y}}{n}(t - t_0); \quad \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right) = \frac{\dot{z}}{n}(t - t_0), \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial x}{\partial M_0} = \frac{\dot{x}}{n}; \quad \frac{\partial y}{\partial M_0} = \frac{\dot{y}}{n}; \quad \frac{\partial z}{\partial M_0} = \frac{\dot{z}}{n}. \tag{9.2}$$

Переходя к нахождению частных производных от координат по a, заметим, что x, y, z зависят от a двояко: с одной стороны, они пропорциональны r, а следовательно, и a, с другой стороны — координаты зависят от n, связанного с a соотношением

$$n = ka^{-3/2},$$

дающим

$$\frac{dn}{da} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}.$$

Поэтому имеем

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a} + \left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)\frac{dn}{da}.$$

Пользуясь равенствами (9.1), окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial x}{\partial a} &= x - \frac{3}{2}\dot{x}(t - t_0), \\ a\frac{\partial y}{\partial a} &= y - \frac{3}{2}\dot{y}(t - t_0), \\ a\frac{\partial z}{\partial a} &= z - \frac{3}{2}\dot{z}(t - t_0). \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

Остается найти производные по эксцентриситету. Равенство

$$x = aP_x(\cos E - e) + aQ_x\sqrt{1-e^2}\sin E \tag{9.4}$$

дает

$$\frac{\partial x}{\partial e} = -aP_x - \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}Q_x \sin E + \frac{\partial x}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial e}.$$

Но

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial E}\dot{E}; \quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{a}{r}\sin E; \quad \dot{E} = \frac{na}{r}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x}{\partial e} = -aP_x - \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}Q_x \sin E + \frac{\dot{x}}{n}\sin E.$$

С другой стороны, из равенства

$$r = a(1 - e\cos E)$$

выводим

$$\dot{r} = ae\sin E \cdot \dot{E} = \frac{nea^2}{r}\sin E.$$

Исключая при помощи этого соотношения $\sin E$, получим

$$\frac{\partial x}{\partial e} = -A_x - \left(\frac{e}{1-e^2}B_x - \frac{\dot{x}}{n}\right)\frac{r\dot{r}}{nea^2}, \tag{9.5}$$

где, как обычно, положено

$$A_x = aP_x; \quad B_x = a\sqrt{1-e^2}Q_x.$$

Чтобы исключить из соотношения (9.5) эти величины, выражение (9.4) и его производную по t напишем так:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_x(\cos E - e) + B_x \sin E,\\ \dot{x} &= \left(-A_x \sin E + B_x \cos E\right)\frac{na}{r};\end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

отсюда

$$A_x = \frac{ax}{r}\cos E - \frac{\dot{x}}{n}\sin E,$$

$$B_x = \frac{ax}{r}\sin E + \frac{\dot{x}}{n}(\cos E - e)$$

и потому, подставив эти значения в (9.5), получим

$$\frac{\partial x}{\partial e} = -\frac{ax}{r}\left[\cos E + \frac{e}{1-e^2}\sin^2 E\right] + \frac{\dot{x}}{n}\left[2 - \frac{e}{1-e^2}(\cos E - e)\right]\frac{r\dot{r}}{nea^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial x}{\partial e} = e^{-1}\mathscr{E}x + e^{-1}\mathscr{E}'\dot{x}, \tag{9.7}$$

где, как легко видеть,

$$e^{-1}\mathscr{E} = -\frac{(1-e^2)\cos E + e\sin^2 E}{(1-e^2)(1-e\cos E)} = \frac{r+p-2a}{ep}$$

$$e^{-1}\mathscr{E}' = \frac{2-e^2-e\cos E}{n(1-e^2)}\,\frac{r\dot{r}}{nea^2},$$

откуда

$$\mathscr{E} = 1+\frac{r}{p}-\frac{2}{1-e^2}; \quad \mathscr{E}' = k^{-2}ar\dot{r}\left(1+\frac{r}{p}\right), \tag{9.8}$$

$$k^{-2} = 3379{,}381; \quad \lg k^{-2} = 3{,}528\,8371.$$

Соотношение

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$$

служит для вычисления $r\dot{r}$.

§ 10. Продолжение. Случай параболической орбиты

При исправлении кометной орбиты методом вариации элементов могут встретиться три случая. Если исправляемая орбита — эллиптическая с умеренным эксцентриситетом, как это имеет место для короткопериодических комет, то применяются формулы предыдущего параграфа. Другой, особенно часто встречающийся случай, это тот, когда параболическая орбита настолько хорошо представляет наблюдения, что ее можно положить в основу вычисления окончательной орбиты. Наконец, в третьем случае, встречающемся при изучении движения долгопериодических комет, эксцентриситет хотя и близок к единице, но не настолько, чтобы можно было пренебречь квадратом разности $e-1$ и за исправляемую орбиту взять параболическую.

В этом параграфе мы рассмотрим второй случай, когда при помощи исходной орбиты с внутренними элементами T, q, $e=1$ ищется орбита с вероятнейшими значениями всех шести элементов. Задача приводится, таким образом, к нахождению значений частных производных x, y, z по T, q, e при $e=1$.

В рассматриваемом случае можно воспользоваться формулами (4.6), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) гл. IV:

$$x = P_x\xi + Q_x\eta; \quad y = P_y\xi + Q_y\eta; \quad z = P_z\xi + Q_z\eta, \tag{10.1}$$

$$\xi = q(1-\sigma^2); \quad \eta = kq\sqrt{1+e}\,U(\zeta)\,\sigma, \tag{10.2}$$

где

$$\zeta = \frac{1}{2}(1-e)\sigma^2,$$

а σ определяется уравнением

$$\sigma U(\zeta) + \sigma^3 V(\zeta) = B, \tag{10.3}$$