где, как легко видеть,

$$e^{-1}\mathscr{E} = -\frac{(1-e^2)\cos E + e\sin^2 E}{(1-e^2)(1-e\cos E)} = \frac{r+p-2a}{ep}$$

$$e^{-1}\mathscr{E}' = \frac{2-e^2-e\cos E}{n(1-e^2)}\,\frac{r\dot{r}}{nea^2},$$

откуда

$$\mathscr{E} = 1 + \frac{r}{p} - \frac{2}{1-e^2}; \quad \mathscr{E}' = k^{-2}ar\dot{r}\left(1+\frac{r}{p}\right), \tag{9.8}$$

$$k^{-2} = 3379{,}381; \quad \lg k^{-2} = 3{,}528\,8371.$$

Соотношение

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$$

служит для вычисления $r\dot{r}$.

§ 10. Продолжение. Случай параболической орбиты

При исправлении кометной орбиты методом вариации элементов могут встретиться три случая. Если исправляемая орбита — эллиптическая с умеренным эксцентриситетом, как это имеет место для короткопериодических комет, то применяются формулы предыдущего параграфа. Другой, особенно часто встречающийся случай, это тот, когда параболическая орбита настолько хорошо представляет наблюдения, что ее можно положить в основу вычисления окончательной орбиты. Наконец, в третьем случае, встречающемся при изучении движения долгопериодических комет, эксцентриситет хотя и близок к единице, но не настолько, чтобы можно было пренебречь квадратом разности $e-1$ и за исправляемую орбиту взять параболическую.

В этом параграфе мы рассмотрим второй случай, когда при помощи исходной орбиты с внутренними элементами T, q, $e=1$ ищется орбита с вероятнейшими значениями всех шести элементов. Задача приводится, таким образом, к нахождению значений частных производных x, y, z по T, q, e при $e=1$.

В рассматриваемом случае можно воспользоваться формулами (4.6), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) гл. IV:

$$x = P_x\xi + Q_x\eta; \quad y = P_y\xi + Q_y\eta; \quad z = P_z\xi + Q_z\eta, \tag{10.1}$$

$$\xi = q(1-\sigma^2); \quad \eta = kq\sqrt{1+e}\,U(\zeta)\,\sigma, \tag{10.2}$$

где

$$\zeta = \frac{1}{2}(1-e)\sigma^2,$$

а σ определяется уравнением

$$\sigma U(\zeta) + \sigma^3 V(\zeta) = B, \tag{10.3}$$

в котором

$$B = q^{-3/2}(t - T) \tag{10.4}$$

$$U(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{8}\zeta^2 - \ldots\right),$$

$$V(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\zeta + \frac{3}{56}\zeta^2 + \ldots\right).$$

Проще всего выражаются производные по T. Равенство (10.4) показывает, что

$$\frac{\partial x}{\partial T} = -\dot{x}; \quad \frac{\partial y}{\partial T} = -\dot{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial T} = -\dot{z}. \tag{10.5}$$

При вычислении производных по q надо учесть, что x, y, z, с одной стороны, пропорциональны q, а с другой — зависят от q через посредство B. Таким образом,

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{x}{q} + \frac{\partial x}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial q}.$$

Но

$$\frac{\partial x}{\partial B} = \dot{x}q^{3/2}; \quad \frac{\partial B}{\partial q} = -\frac{3}{2}q^{-5/2}(t - T),$$

поэтому окончательно

$$\left.\begin{aligned} q\frac{\partial x}{\partial q} &= x - \frac{3}{2}\dot{x}(t - T),\\ q\frac{\partial y}{\partial q} &= y - \frac{3}{2}\dot{y}(t - T),\\ q\frac{\partial z}{\partial q} &= z - \frac{3}{2}\dot{z}(t - T). \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

Выражения производных (10.5) и (10.6) не зависят от величины e. Частные производные по e, к которым мы теперь переходим, будем вычислять только для частного значения $e=1$.

Дифференцирование уравнения (10.3) дает

$$[U(\zeta) + 3\sigma^2 V(\zeta)]\frac{\partial\sigma}{\partial e} + \sigma\frac{\partial U(\zeta)}{\partial e} + \sigma^3\frac{\partial V(\zeta)}{\partial e} = 0,$$

откуда, полагая $e=1$ и принимая во внимание, что производные

$$\frac{\partial U(\zeta)}{\partial e} = U'(\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial e}; \quad \frac{\partial V(\zeta)}{\partial e} = V'(\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial e}$$

при этом значении e равны соответственно

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\frac{1}{4}\sigma_0^2 \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{k}\frac{1}{20}\sigma_0^2,$$

получим

$$(1 + \sigma_0^2)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial e}\right)_0 + \frac{1}{4}\sigma_0^3 - \frac{1}{20}\sigma_0^5 = 0. \tag{10.7}$$

Здесь через σ_0 и $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial e}\right)_0$ обозначены σ и $\frac{\partial\sigma}{\partial e}$ для $e=1$, так что

$$\sigma_0=\operatorname{tg}\frac{v}{2},$$

где v — истинная аномалия параболического движения.

Обратимся теперь к формулам (10.1) и (10.2). Прежде всего имеем

$$\frac{\partial x}{\partial e}=\left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)+\frac{\partial x}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial e}. \qquad (10.8)$$

Обозначенная через $\left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)$ производная берется по e, фигурирующему в указанных формулах явно, а не через посредство σ. Поэтому

$$\left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)=Q_x\left(\frac{\partial\eta}{\partial e}\right)=\frac{1}{2}kqQ_x\left[(1+e)^{-1/2}U(\zeta)\sigma-(1+e)^{1/2}U'(\zeta)\sigma^3\right],$$

откуда, при $e=1$,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)=\frac{1}{2}qQ_x(\sigma_0+\sigma_0^3)=\frac{1}{2}\sigma_0 rQ_x, \qquad (10.9)$$

потому что (§ 4 гл. IV)

$$r=q(1+e\sigma^2).$$

Остается вычислить входящую в равенство (10.8) производную $\frac{\partial x}{\partial\sigma}$. Так как

$$\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial\sigma}\dot{\sigma},$$

а из уравнения (10.3) имеем

$$(1+\sigma_0^2)\dot{\sigma}_0=\frac{k}{\sqrt{2}}q^{-3/2},$$

то при $e=1$ окончательно получим

$$\frac{\partial x}{\partial\sigma}=\frac{\sqrt{2}}{k}q^{3/2}(1+\sigma_0^2)\dot{x}. \qquad (10.10)$$

Пользуясь равенствами (10.7), (10.9) и (10.10), из формулы (10.8) получим следующее выражение искомой производной по эксцентриситету (для $e=1$):

$$\frac{\partial x}{\partial e}=\frac{1}{2}\sigma rQ_x+\frac{\sqrt{2}}{20k}q^{3/2}\sigma^3(\sigma^2-5)\dot{x}, \qquad (10.11)$$

причем через σ здесь обозначена величина, соответствующая исправляемой параболической орбите, т. е. получаемая из уравнения

$$\frac{\sqrt{2}}{k}\left(\sigma+\frac{1}{3}\sigma^3\right)=q^{-3/2}(t-T). \tag{10.12}$$

Из формул (10.1) легко найти, что

$$Q_x=\frac{\xi\dot{x}-\dot{\xi}x}{\xi\dot{\eta}-\dot{\xi}\eta}.$$

Так как для параболического движения

$$\xi=q(1-\sigma^2);\quad \eta=2q\sigma,$$

то это дает

$$Q_x=\frac{\sigma}{r}x+\frac{\sqrt{q}}{k\sqrt{2}}(1-\sigma^2)\dot{x}.$$

Подстановка этого выражения в равенство (10.11) приводит к следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial e}&=\frac{1}{2}\sigma^2 x+\frac{\sqrt{2}}{4k}q^{3/2}\sigma\left(1-\sigma^2-\frac{4}{5}\sigma^4\right)\dot{x},\\
\frac{\partial y}{\partial e}&=\frac{1}{2}\sigma^2 y+\frac{\sqrt{2}}{4k}q^{3/2}\sigma\left(1-\sigma^2-\frac{4}{5}\sigma^4\right)\dot{y},\\
\frac{\partial z}{\partial e}&=\frac{1}{2}\sigma^2 z+\frac{\sqrt{2}}{4k}q^{3/2}\sigma\left(1-\sigma^2-\frac{4}{5}\sigma^4\right)\dot{z},
\end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4k}=20{,}55292;\quad \lg\frac{\sqrt{2}}{4k}=1{,}312\,8736.$$

Формулы (10.5), (10.6) и (10.13) полностью решают поставленную задачу.

Примечание. Формулы этого параграфа, распространяющие метод Эккерта и Брауэра на случай исправления параболической орбиты, были даны М. Ф. Субботиным [1941]. Д. К. Куликов [1951] дал другой вывод этих формул и предложил следующую модификацию выражений (10.13).

Равенство (10.12) показывает, что

$$\frac{\sqrt{2}}{4k}q^{3/2}\sigma=\frac{3}{2}\,\frac{t-T}{2\sigma^2+6}.$$

Подстановка этого выражения в (10.13) после выделения в правых частях выражений (10.6) дает следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial e}&=Lx-K\left[x-\frac{3}{2}\dot{x}(t-T)\right],\\
\frac{\partial y}{\partial e}&=Ly-K\left[y-\frac{3}{2}\dot{y}(t-T)\right],\\
\frac{\partial z}{\partial e}&=Lz-K\left[z-\frac{3}{2}\dot{z}(t-T)\right],
\end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

где

$$L=\frac{\sigma^4+10\sigma^2+5}{10\sigma^2+30},\qquad K=\frac{4\sigma^4+5\sigma^2-5}{10\sigma^2+30}.$$

Указанная работа содержит таблицы, дающие L и K с шестью десятичными знаками по аргументу

$$\lambda = q^{-2}r^2 = (1+\sigma^2)^2$$

для $\lambda = 1\ (0{,}01)\ 10\ (0{,}1)\ 100\ (1)\ 1000$.

§ 11. Продолжение. Орбиты с эксцентриситетами, очень близкими к единице

В начале § 10 было указано, что при исправлении кометных орбит могут встретиться три различных случая. Нам остается рассмотреть последний из них. Он характеризуется тем, что величина $e-1$ настолько мала, что формулы, выведенные в § 9, становятся неудобными или даже неприменимыми; но, с другой стороны, эта величина еще не настолько мала, чтобы ее квадратом можно было пренебречь и употребить формулы предыдущего параграфа. Такой случай встречается при улучшении орбит долгопериодических комет; он может также встретиться, хотя и крайне редко, при исправлении гиперболической орбиты.

В этом случае за исправляемые внутренние элементы вместо M_0, a и e выгоднее принять T, $q=a(1-e)$ и константу энергии $h=-a^{-1}$.

Такой выбор исправляемых элементов особенно удобен для эллиптических орбит, так как он позволяет наиболее надежно судить о границах неопределенности периода обращения, что здесь представляет особый интерес. С другой стороны, константа энергии столь же хорошо характеризует род орбиты, как и эксцентриситет. Величина эксцентриситета, к тому же, удобно вычисляется по формуле

$$e = 1 + qh. \tag{11.1}$$

Обозначим через ∂x ту часть дифференциала dx, которая берется по внутренним элементам. Тогда

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial T}dT + \frac{\partial x}{\partial q}dq + \frac{\partial x}{\partial h}dh. \tag{11.2}$$

Так как координаты кометы являются функциями разности $t-T$, то

$$\frac{\partial x}{\partial T} = -\dot{x}; \quad \frac{\partial y}{\partial T} = -\dot{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial T} = -\dot{z}. \tag{11.3}$$

Для вычисления других производных, входящих в выражение (11.2), заметим, что в случае, когда за внутренние элементы орбиты принимаются T, a и e, имеем

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial T}dT + \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial e}de.$$