Указанная работа содержит таблицы, дающие L и K с шестью десятичными знаками по аргументу

$$\lambda = q^{-2}r^2 = (1+\sigma^2)^2$$

для $\lambda = 1\ (0{,}01)\ 10\ (0{,}1)\ 100\ (1)\ 1000$.

§ 11. Продолжение. Орбиты с эксцентриситетами, очень близкими к единице

В начале § 10 было указано, что при исправлении кометных орбит могут встретиться три различных случая. Нам остается рассмотреть последний из них. Он характеризуется тем, что величина $e-1$ настолько мала, что формулы, выведенные в § 9, становятся неудобными или даже неприменимыми; но, с другой стороны, эта величина еще не настолько мала, чтобы ее квадратом можно было пренебречь и употребить формулы предыдущего параграфа. Такой случай встречается при улучшении орбит долгопериодических комет; он может также встретиться, хотя и крайне редко, при исправлении гиперболической орбиты.

В этом случае за исправляемые внутренние элементы вместо M_0, a и e выгоднее принять T, $q=a(1-e)$ и константу энергии $h=-a^{-1}$.

Такой выбор исправляемых элементов особенно удобен для эллиптических орбит, так как он позволяет наиболее надежно судить о границах неопределенности периода обращения, что здесь представляет особый интерес. С другой стороны, константа энергии столь же хорошо характеризует род орбиты, как и эксцентриситет. Величина эксцентриситета, к тому же, удобно вычисляется по формуле

$$e = 1 + qh. \tag{11.1}$$

Обозначим через ∂x ту часть дифференциала dx, которая берется по внутренним элементам. Тогда

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial T}dT + \frac{\partial x}{\partial q}dq + \frac{\partial x}{\partial h}dh. \tag{11.2}$$

Так как координаты кометы являются функциями разности $t-T$, то

$$\frac{\partial x}{\partial T} = -\dot{x}; \qquad \frac{\partial y}{\partial T} = -\dot{y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial T} = -\dot{z}. \tag{11.3}$$

Для вычисления других производных, входящих в выражение (11.2), заметим, что в случае, когда за внутренние элементы орбиты принимаются T, a и e, имеем

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial T}dT + \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial e}de.$$

Поэтому, пользуясь выражениями (9.3), (9.7) и (9.8), а также учитывая, что

$$da = a^2\,dh; \quad de = h\,dq + q\,dh,$$

будем иметь

$$\frac{\partial x}{\partial q} = Qx + Q'\dot{x}; \quad \frac{\partial x}{\partial h} = Hx + H'\dot{x}, \tag{11.4}$$

где

$$Q = \frac{1 + e^2 + hr}{ep}; \quad Q' = -\frac{r\dot{r}\,(r + p)}{k^2 ep}, \tag{11.5}$$

$$H = \frac{r - q}{e\,(1 + e)}; \quad H' = -\frac{3}{2}\,a\,(t - T) - aqQ'. \tag{11.6}$$

В рассматриваемом нами случае, когда эксцентриситет близок к единице, а абсолютная величина a очень велика, коэффициенты Q, Q' и H находятся по этим формулам без затруднений, но выражение для H' должно быть заменено другим, более удобным для вычислений.

Обратимся для этого к формулам, данным в § 4 гл. IV. Полученное там соотношение (4.7) показывает, что уравнение Кеплера можно представить в такой форме:

$$a\,(t - T) = \sqrt{2}\,k^{-1} a^{5/2} (1 - e)^{3/2} \left[\sigma \cos g + \sigma^3 G\,(g)\right], \tag{11.7}$$

где

$$g = \frac{1}{2}\,E; \quad \sigma = \frac{\sqrt{2} \sin g}{\sqrt{1 - e}}; \quad G\,(g) = \frac{2g - \sin 2g}{4 \sin^3 g}.$$

С другой стороны, из формулы (4.15) гл. IV легко вывести равенство

$$ar\dot{r} = kea^{3/2} \sin E = \sqrt{2}\,kea^{3/2} \sigma\,(1 - e)^{1/2} (1 - \zeta)^{1/2}, \tag{11.8}$$

где

$$\zeta = \sin^2 g = \frac{1}{2}\,(1 - e)\,\sigma^2.$$

Подстановка выражений (11.7) и (11.8) в формулы (11.5) и (11.6) для H' дает

$$H' = maq^{3/2} \left[\frac{\sigma - e\sigma + 2e\sigma^3}{1 + e} \sqrt{1 - \zeta} - 3\sigma^3 G\,(g)\right],$$

где для краткости положено

$$m = 1/\sqrt{2}\,k.$$

Учитывая, что $G\,(0) = 1/3$, это выражение напишем так:

$$H' = H_0' + H_1',$$

где

$$H'_0 = maq^{3/2}\left(\frac{\sigma - e\sigma + 2e\sigma^3}{1+e} - \sigma^3\right) = mq^{5/2}\frac{\sigma - \sigma^3}{1+e},$$

$$H'_1 = maq^{3/2}\left\{\frac{\sigma - e\sigma + 2e\sigma^3}{1+e}\left(\sqrt{1-\zeta} - 1\right) - \sigma^3\left[3G(g) - 1\right]\right\}.$$

Введем функцию $T(\zeta)$, определяемую равенством

$$3G(g) - 1 = 2\sqrt{2}k\zeta T(\zeta) = \sqrt{2}k(1-e)\sigma^2 T(\zeta), \qquad (11.9)$$

и заметим, что

$$\sqrt{1-\zeta} - 1 = \frac{-\zeta}{1+\sqrt{1-\zeta}} = -\frac{(1-e)\sigma^2}{2\left(1+\sqrt{1-\zeta}\right)}.$$

Тогда

$$H'_1 = -q^{5/2}\sigma\left[\frac{m}{2+2e}\,\frac{(1-e)\sigma^2 - 2e\sigma^4}{1+\sqrt{1-\zeta}} + \sigma^4 T(\zeta)\right].$$

Таким образом, для вычисления коэффициента H' окончательно имеем такую формулу:

$$H' = q^{5/2}\sigma\left[\frac{m}{1+e}\left(1 - \sigma^2 - \frac{\zeta + e\sigma^4}{1+\sqrt{1-\zeta}}\right) - \sigma^4 T(\zeta)\right], \qquad (11.10)$$

$$m = 41{,}105\,8431; \quad \lg m = 1{,}613\,9036,$$

вполне удобную при значениях эксцентриситета, сколь угодно близких к единице.

Полезно отметить, что соотношение (11.8) позволяет представить выражение (11.5) для Q' в такой форме:

$$Q' = -2m\sigma q^{1/2}\sqrt{1-\zeta}\left(\frac{r}{p} + 1\right). \qquad (11.11)$$

Итак, для рассматриваемого момента t нужно прежде всего решить уравнение (11.7), приведенное (§ 4 гл. IV) к виду (4.11), относительно σ. Это даст и величину ζ. По формулам (11.5), (11.6), (11.10) и (11.11) найдем Q, Q', H, H', после чего равенства (11.4) дадут искомые производные координат по элементам.

Таблица XII дает значения функции $T(\zeta)$, фигурирующей в формуле (11.10), с шестью десятичными знаками для $\zeta = -0{,}200\,(0{,}001)\,0{,}200$.

Можно показать [Субботин, 1959], что

$$T(\zeta) = \frac{3m}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{\zeta^n}{2n+5}.$$

Эта работа содержит таблицу, дающую функцию $T(\zeta)$ с семью десятичными знаками.

Легко видеть, что

$$V(\zeta)=\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\zeta T(\zeta),$$

где через $V(\zeta)$ обозначена функция, рассматривавшаяся нами ранее (§ 4 гл. IV и § 13 гл. V).

Примечание. Выведенные в этом параграфе общие формулы удобно применять и в том случае, когда исправляемая орбита параболическая.

Полагая $e=1$, $h=0$, $\zeta=0$, $p=2q$ и учитывая, что $T(0)=\frac{3}{20}m$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&Q=q^{-1};\quad H=\frac{1}{2}(r-q),\\
&Q'=-k^2r\dot{r}\left(\frac{r}{p}+1\right)=-2m\sigma\sqrt{q}\left(\frac{r}{p}+1\right),\\
&H'=\frac{1}{2}m\sigma q^2\sqrt{q}\left(1-\sigma^2-\frac{4}{5}\sigma^4\right),\\
&2m=82{,}211\,6863;\quad \frac{1}{2}m=20{,}552\,9216.
\end{aligned}\right\}\qquad(11.12)$$

Здесь σ берется из таблицы V или вычисляется при помощи таблицы VI.

Когда найдены исправленные значения q и h, формула (11.1) даст эксцентриситет. Если $h<0$, то соотношение

$$P=365{,}256\,8983\,(-h)^{-3/2}$$

даст период обращения, выраженный в средних солнечных сутках.

§ 12. Составление условных уравнений

Исправление орбиты методом вариации элементов начинается с вычисления (при помощи взятой для исправления орбиты) эфемериды для промежутка времени, охватываемого наблюдениями. В тех случаях, когда стремятся к получению возможно более точных результатов, например, при вычислении окончательной орбиты кометы, гелиоцентрические координаты x, y, z вычисляются с учетом возмущений. Вычисление этих координат и переход от них к геоцентрическим координатам ρ, α, δ выполняется обычно с семью десятичными знаками.

Полученная таким образом эфемерида сравнивается с наблюдениями. Здесь необходим учет разности между эфемеридным временем, которое является аргументом эфемериды, и всемирным временем, в котором даются моменты наблюдений.