Легко видеть, что

$$V(\zeta)=\frac{2}{3}m+\frac{4}{3}\zeta T(\zeta),$$

где через $V(\zeta)$ обозначена функция, рассматривавшаяся нами ранее (§ 4 гл. IV и § 13 гл. V).

Примечание. Выведенные в этом параграфе общие формулы удобно применять и в том случае, когда исправляемая орбита параболическая.

Полагая $e=1$, $h=0$, $\zeta=0$, $p=2q$ и учитывая, что $T(0)=\frac{3}{20}m$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&Q=q^{-1};\quad H=\frac{1}{2}(r-q),\\
&Q'=-k^2 r\dot{r}\left(\frac{r}{p}+1\right)=-2m\sigma\sqrt{q}\left(\frac{r}{p}+1\right),\\
&H'=\frac{1}{2}m\sigma q^2\sqrt{q}\left(1-\sigma^2-\frac{4}{5}\sigma^4\right).\\
&2m=82{,}211\,6863;\quad \frac{1}{2}m=20{,}552\,9216.
\end{aligned}\right\}\qquad(11.12)$$

Здесь σ берется из таблицы V или вычисляется при помощи таблицы VI.

Когда найдены исправленные значения q и h, формула (11.1) даст эксцентриситет. Если $h<0$, то соотношение

$$P=365{,}256\,8983\,(-h)^{-3/2}$$

даст период обращения, выраженный в средних солнечных сутках.

§ 12. Составление условных уравнений

Исправление орбиты методом вариации элементов начинается с вычисления (при помощи взятой для исправления орбиты) эфемериды для промежутка времени, охватываемого наблюдениями. В тех случаях, когда стремятся к получению возможно более точных результатов, например, при вычислении окончательной орбиты кометы, гелиоцентрические координаты x, y, z вычисляются с учетом возмущений. Вычисление этих координат и переход от них к геоцентрическим координатам ρ, α, δ выполняется обычно с семью десятичными знаками.

Полученная таким образом эфемерида сравнивается с наблюдениями. Здесь необходим учет разности между эфемеридным временем, которое является аргументом эфемериды, и всемирным временем, в котором даются моменты наблюдений.

Сравнение эфемериды с наблюдениями, подробно рассмотренное в гл. VII, дает возможность заметить и удалить ошибочные наблюдения, а также заменить более или менее значительные группы наблюдений соответствующими им нормальными местами (§ 2). В результате этой части работы для каждого наблюдения (или нормального места) будем иметь разности «наблюдение — вычисление», иначе говоря, величины

$$\cos\delta\cdot d\alpha=\cos\delta\cdot(\alpha^{o}-\alpha^{c});\quad d\delta=\delta^{o}-\delta^{c}, \tag{12.1}$$

являющиеся правыми частями уравнений (7.4), т. е. «первых промежуточных уравнений».

Уравнения (7.4) выписываются в форме таблицы (или двух таблиц, отдельно для α и δ):

$$\left.\begin{array}{cccr} dx & dy & dz & \\ -\tilde{\rho}\sin\alpha & \tilde{\rho}\cos\alpha & & 0=\cos\delta d\alpha, \\ -\tilde{\rho}\sin\delta\cos\alpha & -\tilde{\rho}\sin\delta\sin\alpha & & \tilde{\rho}\cos\delta=d\delta. \end{array}\right\} \tag{12.2}$$

При вычислении коэффициентов этих уравнений α и δ можно взять равными либо α^o, δ^o, либо α^c, δ^c, либо некоторым средним между ними (округленным) значениям. Свободные члены, т. е. величины (12.1), выражаются обычно в секундах дуги.

Следующим этапом работы является составление «вторых промежуточных уравнений», т. е. уравнений (7.6), которые также записываются в табличной форме:

$$\left.\begin{array}{cccc} dE_1 & dE_2 & \ldots & dE_6 \\ dx=x_{E_1} & x_{E_2} & \ldots & x_{E_6} \\ dy=y_{E_1} & y_{E_2} & \ldots & y_{E_6} \\ dz=z_{E_1} & z_{E_2} & \ldots & z_{E_6} \end{array}\right\}. \tag{12.3}$$

Чтобы вычислить коэффициенты этих уравнений, нужно сначала найти для момента каждого нормального места (или отдельного наблюдения) величины x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Так как в процессе вычисления эфемериды уже получены таблицы, содержащие каждую из координат x, y, z для равноотстоящих моментов времени $t_k=t_0+kw$, где w — шаг эфемериды, а $k=0$, ±1, ±2, ..., то x, y, z находятся интерполированием.

Для этого применяется обычно формула Бесселя

$$f(t_0+nw)=f_0+nf^1_{1/2}+B_2f^2_{1/2}+B_3f^3_{1/2}+\ \ldots, \tag{12.4}$$

в которой

$$B_2=\frac{1}{2}n(n-1);\quad B_3=\frac{1}{6}n(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right);$$

$$B_4=\frac{1}{24}(n+1)n(n-1)(n-2);$$

$$B_5=\frac{1}{120}(n+1)n(n-1)(n-2)\left(n-\frac{1}{2}\right);\ \ldots,$$

причем за t_0 берется такой момент эфемериды, чтобы n удовлетворяло неравенству $0 < n < 1$.

Дифференцирование формулы (12.2) по n дает

$$wf'(t_0 + nw) = f^1_{1/2} + \left(n - \frac{1}{2}\right) f^2_{1/2} + B^1_3 f^3_{1/2} + \ldots, \qquad (12.5)$$

где

$$B^1_3 = \frac{1}{12}(6n^2 - 6n + 1); \quad B^1_4 = \frac{1}{12}(2n^3 - 3n^2 - n + 1);$$

$$B^1_5 = \frac{1}{120}(5n^4 - 10n^3 + 5n - 1); \ldots$$

Эта формула служит для вычисления производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Таблицы XIII и XIV дают коэффициенты формул (12.4) и (12.5) для $n = 0{,}00(0{,}01)1{,}00$.

Имеются специальные сборники таблиц коэффициентов интерполяционных формул [Интерполяционные таблицы, 1956], [Кармазина и Курочкина, 1956], в которых шаг равен 0,001 или даже 0,0001.

Для вычисления производных координат иногда могут быть с успехом применены некоторые специальные приемы [Самойлова-Яхонтова, 1944], [Ханина, 1955].

Закончив вычисление коэффициентов вторых промежуточных уравнений (12.3), подставляем полученные выражения dx, dy, dz в первые промежуточные уравнения (12.2). Это даст для каждого нормального места два условных уравнения вида

$$\left.\begin{array}{l} \underline{dE_1 \quad dE_2 \ \ldots \ dE_6} \\ (\alpha,\ 1)(\alpha,\ 2)\ldots(\alpha,\ 6) = \cos\delta\, d\alpha, \\ (\delta,\ 1)(\delta,\ 2)\ldots(\delta,\ 6) = d\delta. \end{array}\right\} \qquad (12.6)$$

Выбор подлежащих исправлению элементов, а следовательно, и неизвестных $dE_1, \ldots, dE_6$, может быть сделан различно, вследствие чего вторые промежуточные уравнения (12.3) могут иметь различный вид.

Что касается внешних элементов, то чаще всего полагают

$$dE_1 = d\psi_x; \quad dE_2 = d\psi_y; \quad dE_3 = d\psi_z$$

и для вычисления поправок $d\omega$, di, $d\Omega$ пользуются формулами (8.4) и (8.5).

Иногда может оказаться более удобным положить непосредственно

$$dE_1 = d\Omega; \quad dE_2 = di; \quad dE_3 = d\omega$$

и воспользоваться для вычисления производных формулами (8.10).

В отношении выбора внутренних элементов приходится различать три случая.

Если исправляется эллиптическая орбита умеренного эксцентриситета, то можно положить

$$dE_4 = dM_0; \quad dE_5 = a^{-1}\,da; \quad dE_6 = e^{-1}\,de.$$

Тогда в уравнениях (12.3) будем иметь на основании (9.2), (9.3) и (9.7)

$$x_{E_4} = \frac{\dot{x}}{n}; \quad x_{E_5} = x - \frac{3}{2}\dot{x}(t - t_0); \quad x_{E_6} = \mathscr{E}x + \mathscr{E}'\dot{x}$$

и аналогичные выражения для двух других координат. Коэффициенты $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ даются формулами (9.8).

Если эксцентриситет исправляемой орбиты близок к единице, то следует положить

$$dE_4 = dT; \quad dE_5 = dq; \quad dE_6 = dh. \tag{12.7}$$

Тогда

$$x_{E_4} = -\dot{x}; \quad x_{E_5} = Qx + Q'\dot{x}; \quad x_{E_6} = Hx + H'\dot{x},$$

где Q и Q' даются равенствами (11.5) и (11.11); H и H' — равенствами (11.6) и (11.10).

После того как найдены поправки dq и dh к исходным значениям q и h, эксцентриситет исправленной орбиты вычисляется по формуле

$$e = 1 + (q + dq)(h + dh). \tag{12.8}$$

Наконец, в том случае, когда эксцентриситет исправляемой орбиты равен единице, можно применить один из двух следующих способов.

Можно взять те же элементы (12.7), как и в предыдущем случае, но для вычисления коэффициентов Q, Q', H и H' воспользоваться формулами (11.12). После того как будут найдены поправки dq и dh, эксцентриситет окончательной орбиты получим по формуле (12.8), учитывая, что исходное значение h равно нулю.

С другой стороны, можно использовать метод, данный в § 10. В этом случае полагаем

$$dE_4 = dT, \quad dE_5 = q^{-1}\,dq, \quad dE_6 = de.$$

Таким образом, на основании (10.6),

$$x_{E_5} = x - \frac{3}{2}(t - T)\dot{x}; \ \ldots,$$

а для вычисления остальных коэффициентов служат формулы (10.5) и (10.13).